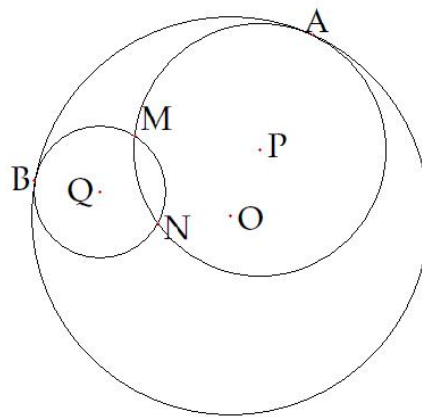


大小2つの円に接する円

大小2つの円に接する円に関する話題を展開しよう。

ここでは、「成立することは確かめてはある」あるいは「図から成り立ちそうな」話を載せます。証明等は省略します。

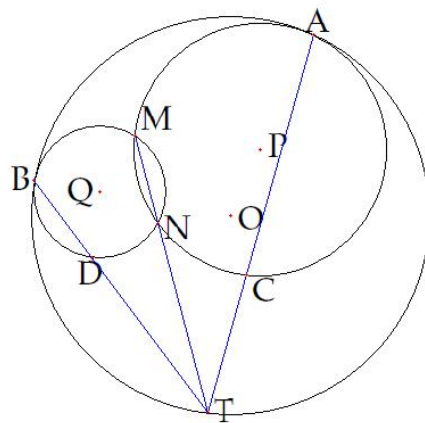
1 スタートの話



図において

円Oに点Aで内接する円Pと
円Oに点Bで内接する円Qとが
点Mと点Nで交わっている。
この節ではこの状況で、成り立ちそ
うな話を
述べてみよう。

[図1-1]



MNの延長と円Oとの交点を
Tとおき
ATと円Pとの交点を
Cとする。(Aと異なる)
BTと円Qとの交点を
Dとする。(Bと異なる)

[図1-2]

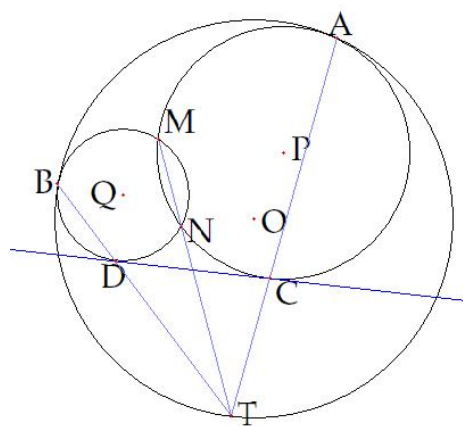


図1－2と同じ記号の下

CDは円Pと接し
CDは円Qと接している。

[図1－3]

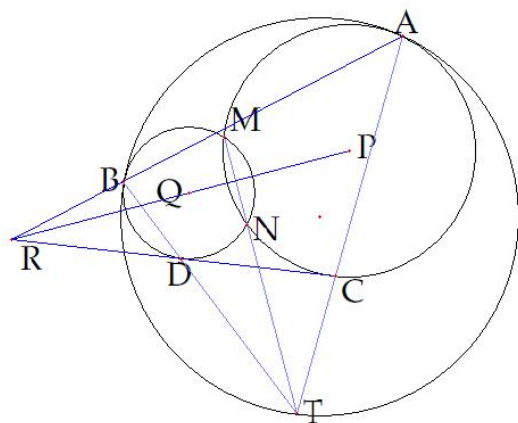


図1－2と同じ記号の下

CDの延長と
PQの延長が
点Rで交わっているとき
ABの延長はRを通る

[図1－4]

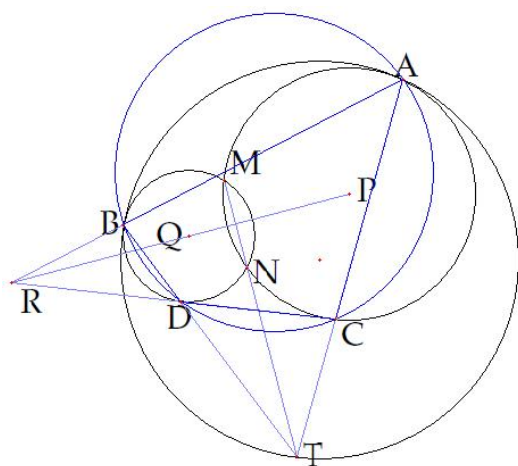


図1－4と同じ記号の下

A, B, D, Cは
同一円周上にある。

[図1－5]

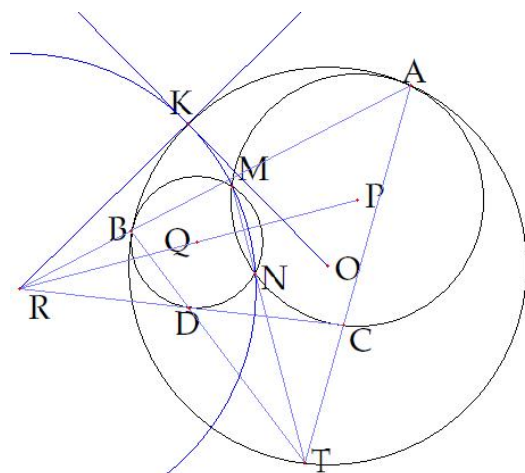


図1-4と同じ記号の下

R から円 O に引いた接線の
接点を K とおくと

$$\text{RK} = \text{RM} = \text{RN}$$

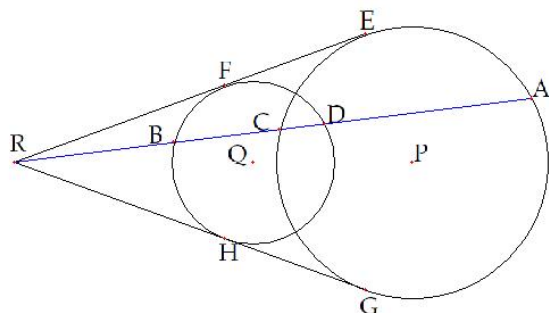
である。

[圖 1-6]

2 交わっている大小2つの円

スタートの問題と同様な問題を、裏側から見てみよう、記号は少し変わっています。

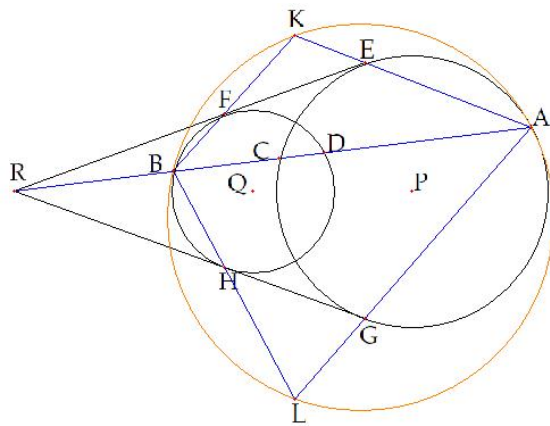
この話を利用するとスタートの話が確かめられます。



図において
 大小2つの円
 P, Q が交わっている。

[图 2-1]

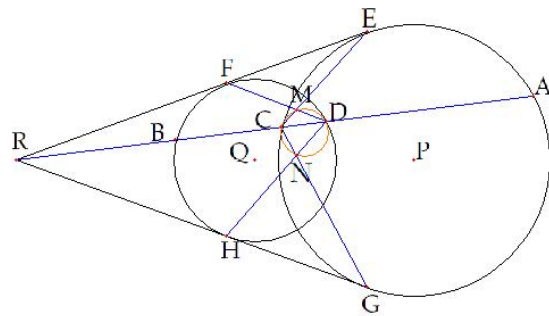
2本の共通接線が R で交わっていて
 E, G は円 P での接点とし F, H は円 Q での接点とする。
 R を通る直線をひき 円 P との交点を A, C とし
 円 Q との交点を B, D とする。
 この状況で成り立つことを幾つか述べていこう。



[図2-1]と同じ記号の下

AE と BF との交点を K
AG と BH との交点を L
とすると
AKBL は円に内接し
その円は 円 P に接し、
円 Q に接している。

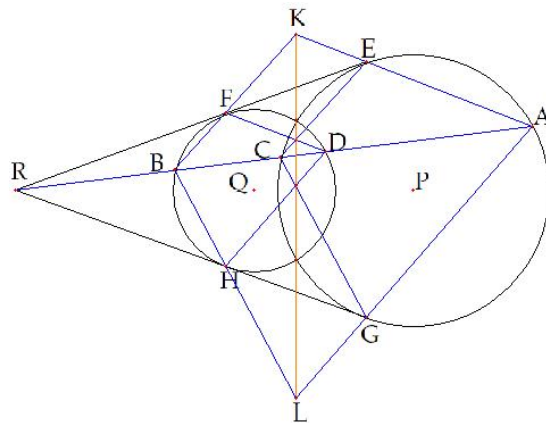
[図2-2]



[図2-1]と同じ記号の下

これも成り立っています。

[図2-3]

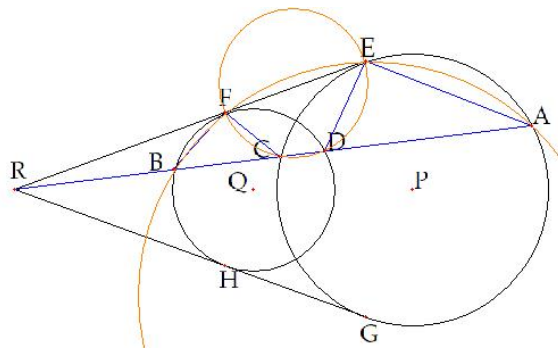


[図2-2][図2-3]と
同じ記号の下

KL は図の残りの
4点を通っている。

[図2-4]

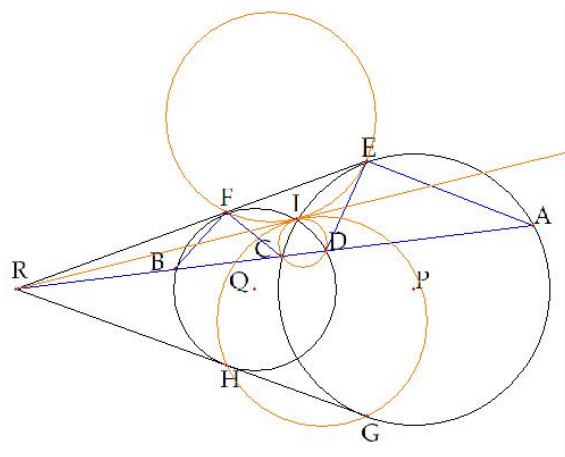
もう少し易しい話をしよう。



[図2-1]と同じ記号の下

ABFE は円に内接し
CDEF も円に内接
している。

[図2-5]



[図2-1]と同じ記号の下

円Pと円Qの交点の
の一つをIとおくと

RIは

$\triangle ABI$, $\triangle CDI$,

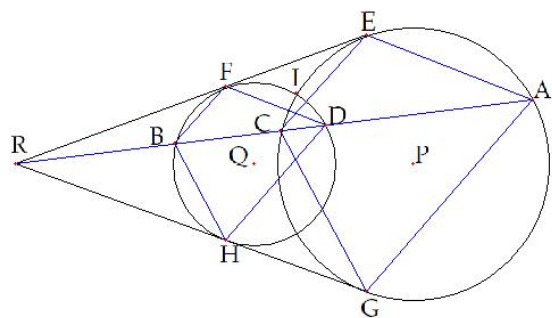
$\triangle EFI$, $\triangle HGI$,

の外接円に接している。

(図には $\triangle ABI$ は省いてあ
ります)

[図2-6]

今までの話の根拠になるものは次の話である
相似の中心に関するものです。



[図2-1]と同じ記号の下

BFとCE

DFとAE

BHとCG

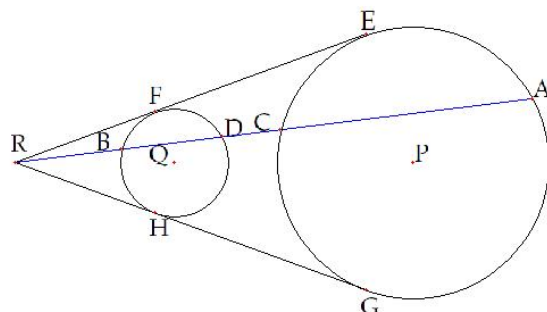
DHとAG

これらは平行である

「図2-7」

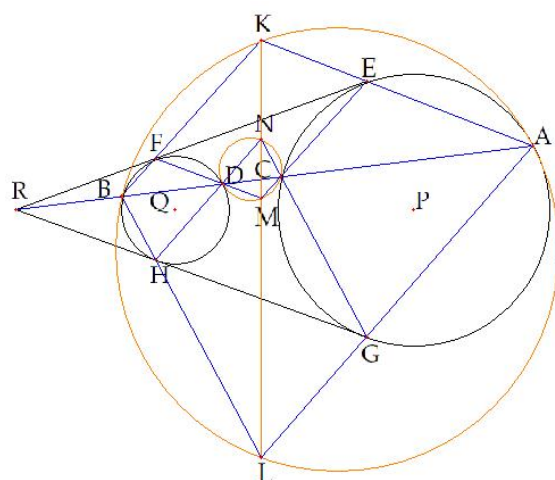
今までの図においてRは
PQを円Pの半径と円Qの半径の比に外分した点でした。

3 離れている大小2つの円



今度は大小2円が
離れている場合を
考えてみよう。

[図3-1]

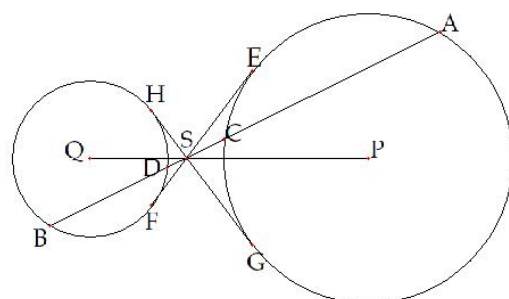


交わっているときと
同様なことが
成り立っていますね

[図3-2]

4 離れている大小2つの円と共通内接線

下図で、何がおきますか？



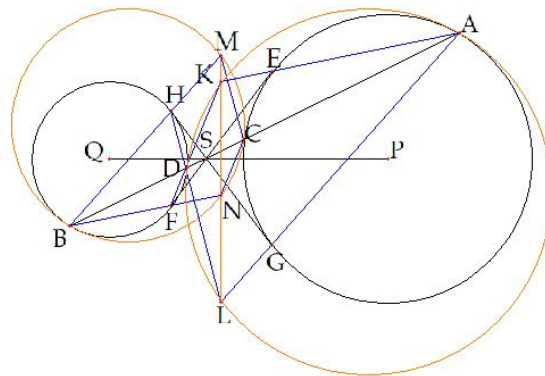
大小の円P,Qが図のように
離れてある。
図のように2本の共通接線が
Sで交わっている。
Sを通る直線が図のように
円P,QとA,C,D,Bで
交わっている。

[図4-1]

B, G, C, H が
同一円周上にある
ように見えますね

AE と FD との交点を K
AG と HD との交点を L
と置くとき
A, K, D, L は
同一円周上にあり
その円は円 P と円 Q に
接している。

[圖 4-4]



[図4-3]と[図4-4]と同じ記号の下

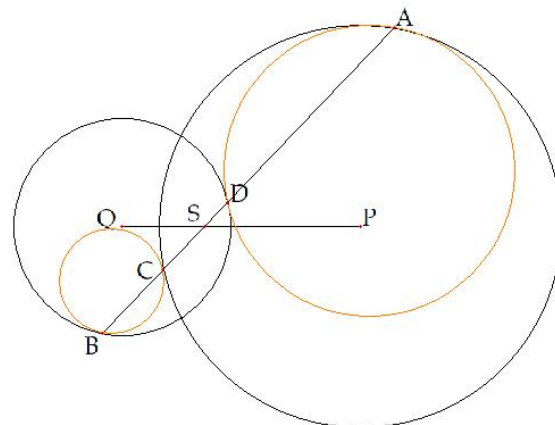
K, M, N, L は一直線上にある。

[図4-5]

5 交わる大小の円と内分点

Sは線分PQ上の点で $PS:QS = \text{円Pの半径}:\text{円Qの半径}$ とする。

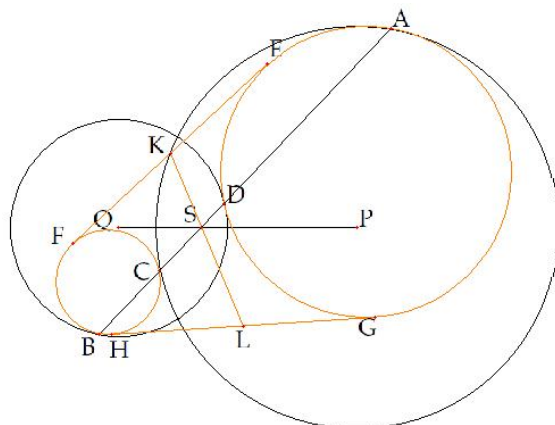
図[5-1]のようにSを通る直線が円PとA,Cで円QとB,Dで交わっているとする。



Aで円Pに内接し
Dと円Q外接する
円がある。

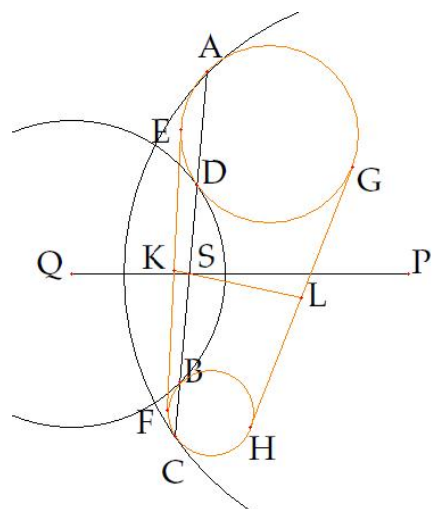
Bで円Qに内接し
Cと円P外接する
円がある。

[図5-1]



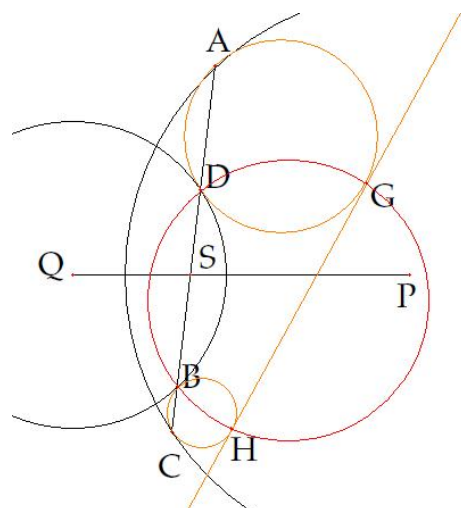
EF, GHを
図[5-1]の二つの円の
共通外接線とし
K, Lを各々
EF, GHの中点とすると
K, S, Lは一直線上にある

[図5-2]



直線 AB を
このように選んでも
上の図と
同じように見えますね

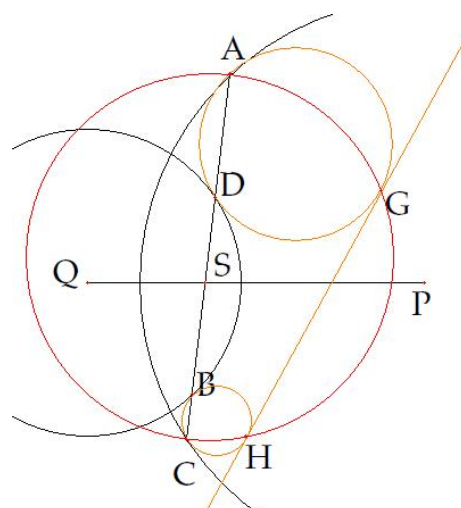
[図 5-3]



[図 5-3] と同じ記号の下

D, B, H, G が
同一円周上にある
ように見えますね

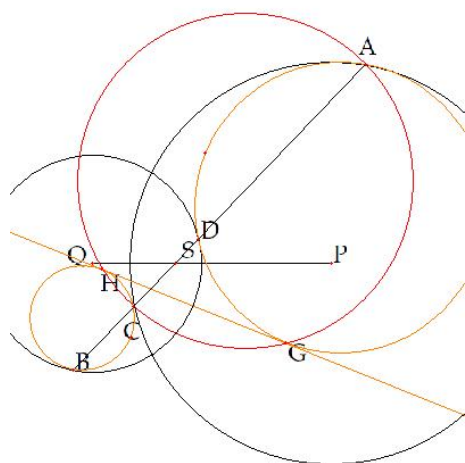
[図 5-4]



[図 5-4] がなりたてば

A, C, H, G も
同一円周上にあり
ますね

[図 5-5]

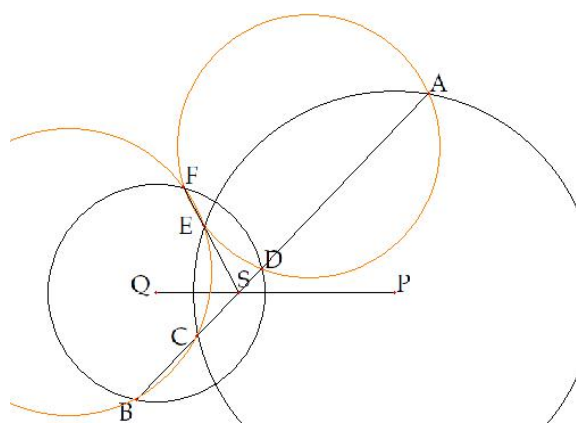


この場合も

A, C, H, G も
同一円周上にあり
そうだね

[図 5-6]

S を通る直線をもう一本引こう。

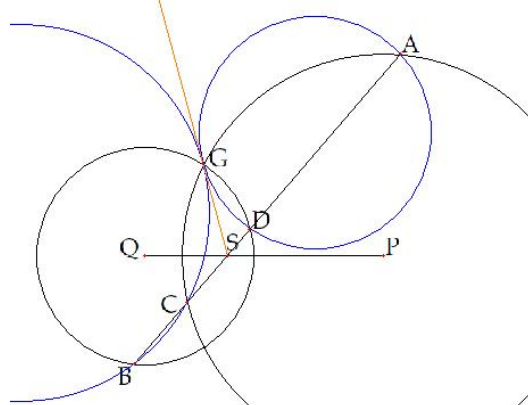


図において
E, F, S は一直線上にある。
このとき

A, F, E, D は
同一円周上にあり

B, C, F, E は
同一円周上にある

[図 5-7]



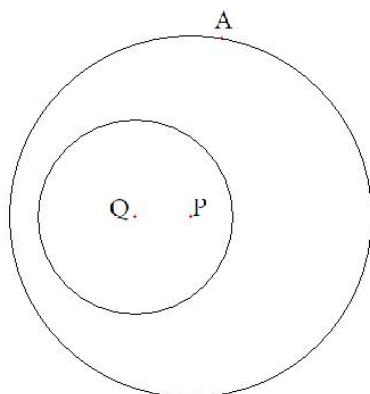
これは、上の図の
特殊化したものです

[図 5-8]

上の二つは座標幾何では確かめてあるのですが。

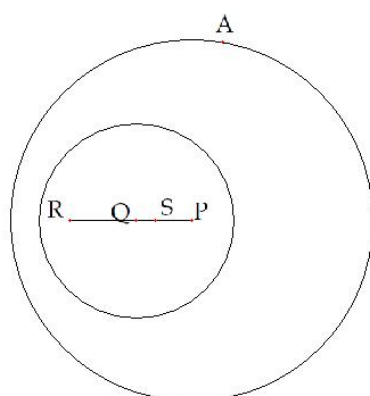
6 大きい円の内部にある小さい円

この節では大きい円 P のなかに小さい円 Q が入っている状況で話を進めよう。二つの円は同心円ではないとしておく。



円 P 上の点 A をとる。
A で円 P に接し
円 Q に接する円を作図しよう。

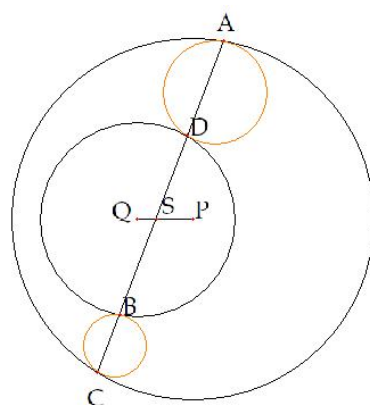
[図 6-1]



PQ を
円 P の半径と
円 Q の半径の比に
外分する点を R
内分する点を S とする。

R と S が大きな働きをします。

[図 6-2]

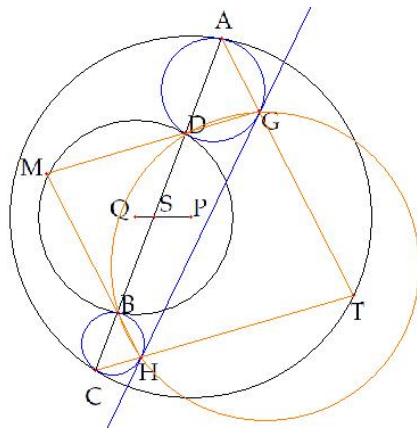


A と S を通る直線を引き
図のように B, C, D をとる。

A で円 P で接し
D で円 Q で接する円がある。

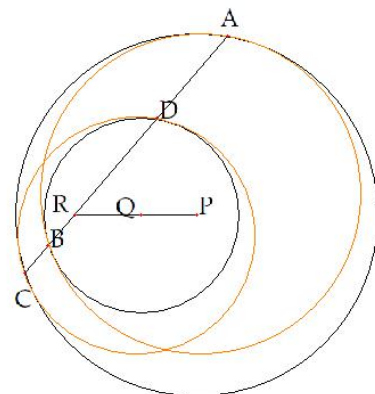
C で円 P で接し
B で円 Q で接する円がある。

[図 6-3]



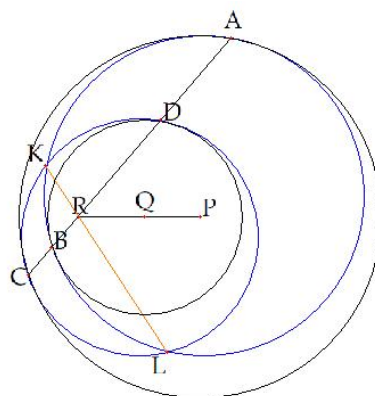
図のように
GHを図[6-3]の
2円の接線とする。
D, B, G, Hは同一円周上にある。
AGとCHの延長は
円P上にある。
GDとHBの延長は
円Q上にある。
G, M, H, Tは平行四辺形になる。

[図6-4]



AとRを通る直線を引き
図のようにB, C, Dをとる。
Aで円Pで接し
Bで円Qで接する円がある。
Cで円Pで接し
Dで円Qで接する円がある。

[図6-5]



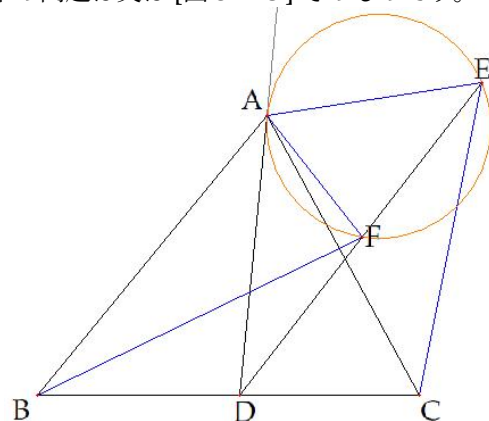
[図6-5]の図での二つの円の
交点をとる直線は
Rを通る。

[図6-6]

7 アレンジ問題

ここでは、今までの話を表現をかえたり発展させたりして問題にしてみよう。

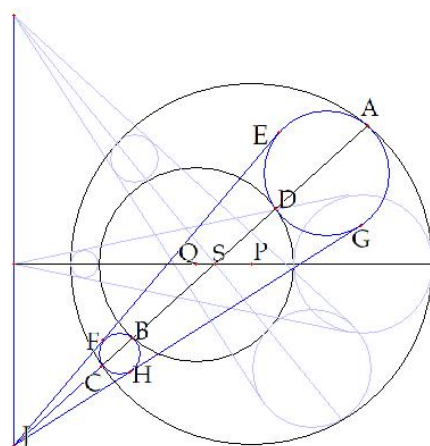
下の問題は実は [図 5-8] そのものです。



三角形 ABC において
D は BC 上の点で
AD は $\triangle BAC$ の二等分線
 $\triangle CAE$ において $CA = CE$
F は DE 上の点で
 $BA = BF$ とする。
このとき

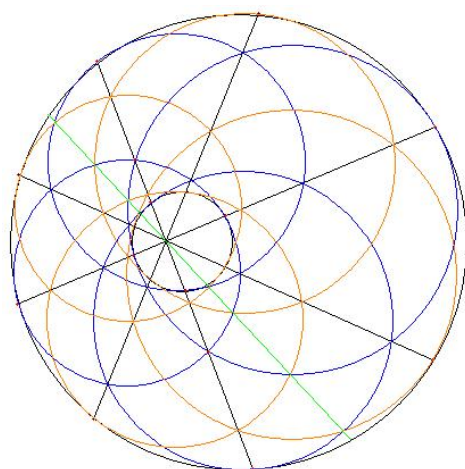
DA は $\triangle AFE$ の外接円に
接している。

次は、[図 6-3][図 6-4] に関係した問題です、図からは成り立ちそうなの
ですが。



[図 7-2]

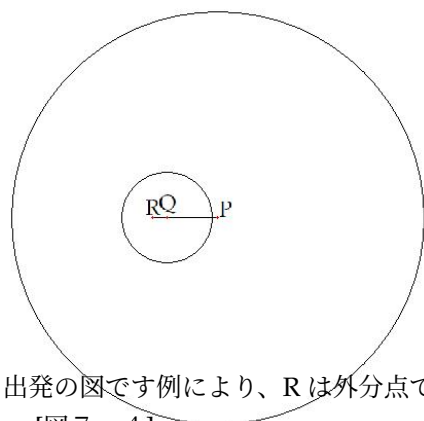
大円 P の中に小円 Q がある
S は PQ を
円 P の半径と円 Q の半径との比に
内分した点である。
図のように円 P の円周上に点 A を
とり
直線 AS と二つの円との交点を
C, B, D とする。
A で円 P と接し、
D で円 Q と接する円と
C で円 P と接し、
B で円 Q と接する円とを描く
この二つの円の二つの外接線
の交点を J とおくと
J は AS 上にある。
J は P の取り方によらず
定直線上にある



[図7-3]

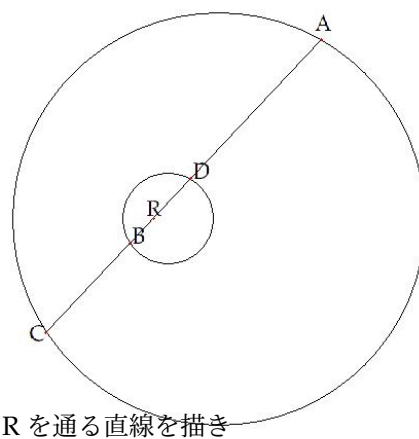
左の図は[図6-6]の
発展したものです。
もっとも、小円はもっと
小さくしてありますが
大円に内接し、
小円が内接する
八個の円が描いてあり、
それらの交点を通る
4本(+1本)の直線の図です。

次からしばらくは
この図を描く手順です

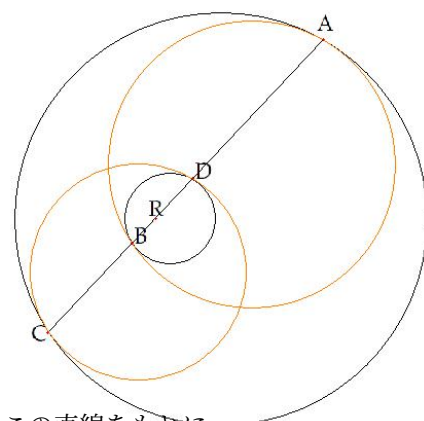


出発の図です例により、Rは外分点です。

[図7-4]

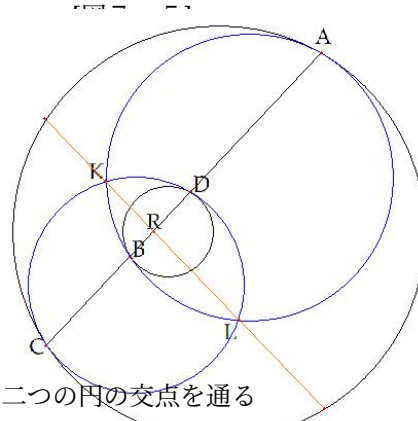


Rを通る直線を描き
A, B, C, Dをとる。



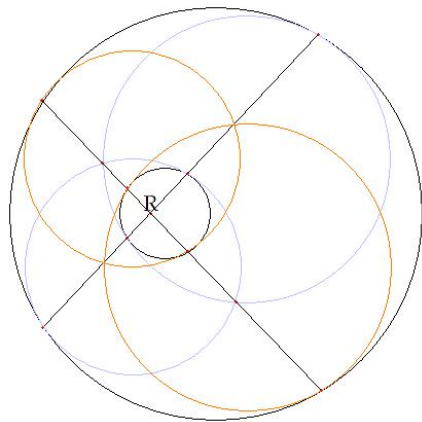
この直線をもとに
2つの円を描く。

[図7-6]

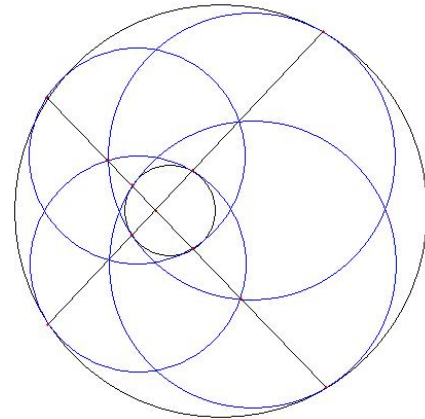


二つの円の交点を通る
Rを通る新しい直線を描く

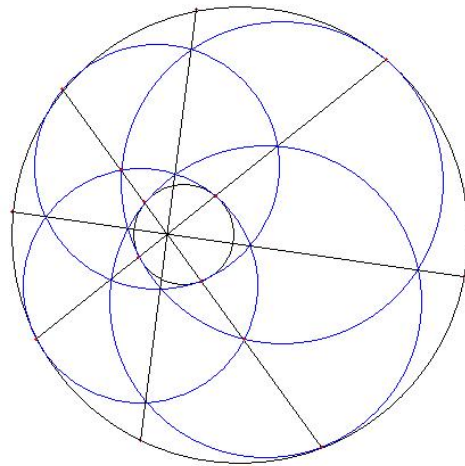
[図7-7]



その直線をもとに二つの円を描く
その交点は始めの直線を定める



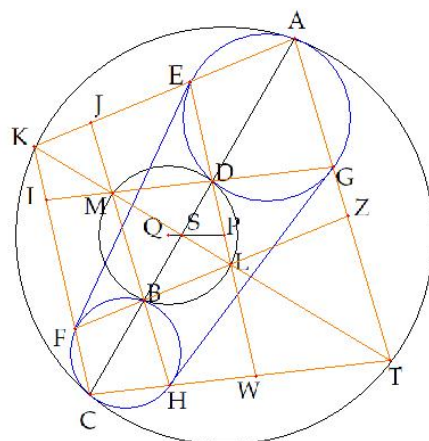
4つの円を描いた [図7-9]



新たに加わった2本の直線から
4個の円を描く
大円と小円に8個の円を描くこと
ができる。
これが[図7-3]である。
新たに1本Rを通る直線が引いて
あります。
あと3本ありそうですね。

新たにRを通る直線が2本見つかる。

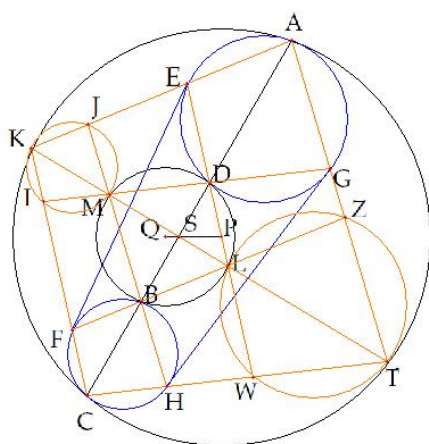
[図7-10]



これは図[6-3]、[図6-4]
から派生した図です。

KTはSを通っている。

[図7-11]

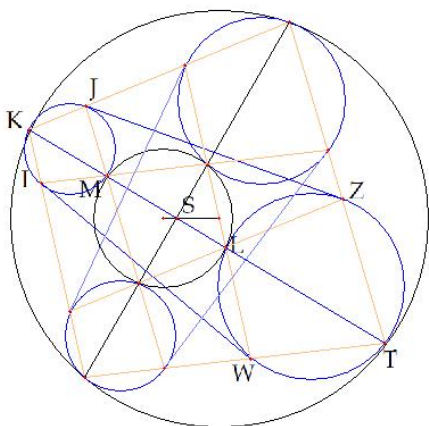


図[7-1 1]の記号もと

K, I, M, J を通る円があり、それは大円と小円に接している。

T, Z, L, W を通る円があり、それは大円と小円に接している。

[図7-1 2]

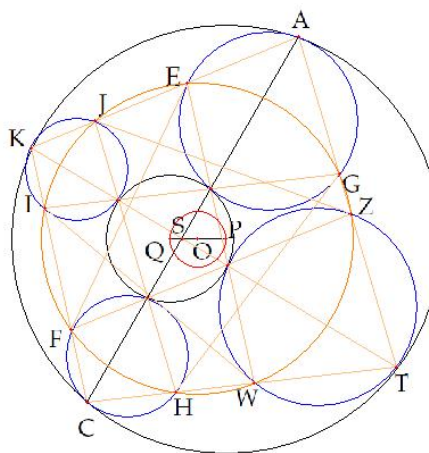


図[7-1 1]の記号もと

K, I, M, J を通る円があり、それは大円と小円に接している。

T, Z, L, W を通る円があり、それは大円と小円に接している。

[図7-1 3]



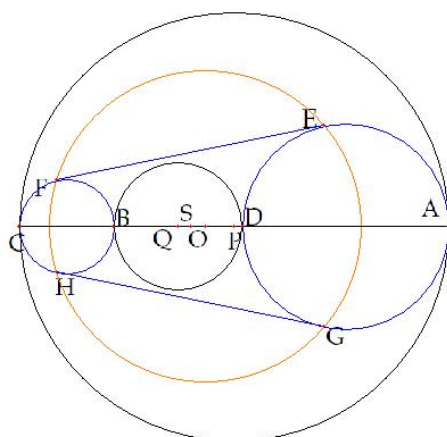
図[7-1 2]の記号もと

E, J, I, F, H, W, Z, G は同一円周上にある。

その円の中心は PQ の中点である。

その円の半径は A の取り方によらず一定 (かな?)

[図7-1 4]

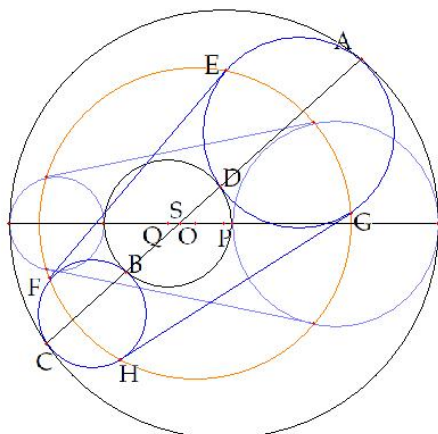


前の図の「一定かな？」の部分が
正しそうなのを図で見よう。

QP の延長上に A をとり、
二つの円を引き
図のように 2 円の共通接線
EF, GH を引き
PQ の中点を O とする。
E, F, G, H は O を中心とする
一つの円の円周上にある。

オレンジ色の円がそうです。

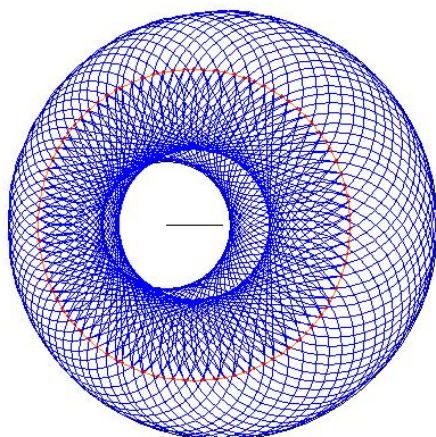
[図 7-1 5]



オレンジ色の円は前図のものです。

円 P 上の別の位置に A を選んで
同様に二つの円を選んで、
E, F, G, H を作ってみると
E, F, G, H はオレンジ色の円上に
ありそうですね。

[図 7-1 6]

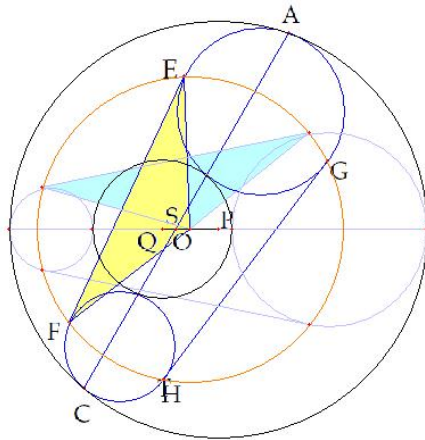


前の図の A を少しづつずらして
絵を描いていた図です。

どう見ても、主張は正しそうですね

もっと、この拡張が
成り立ちそうですね。

[図 7-1 7]



$\triangle OEF$ は A の取り方によらず
皆同型である。

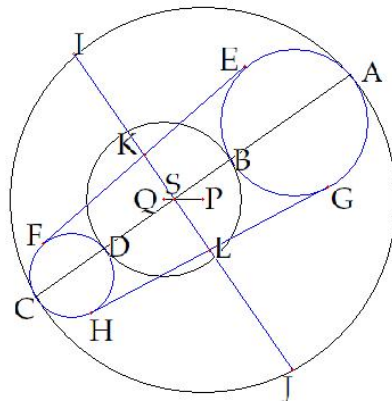
[図 7-18]

8 円の中の円続き

今までの話を別の角度から見てみよう。同じような図が出てきます。

[図 6-3] から派生した図です。

[図 7-11] とよく似ています。



S を通る円 P の弦 AC により、
円 P と円 Q に接する二つの円を描き、
の共通の接線 EF, GH を
図のように描き

EF と HG の中点を通る円 P の
弦 IJ を図のようにとる。

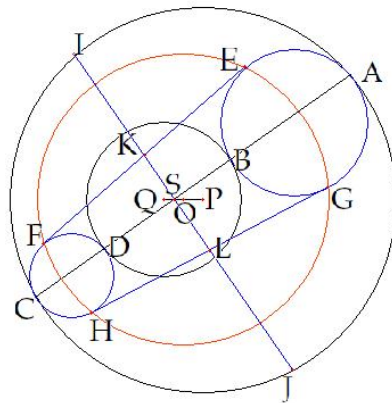
このとき IJ は S を通っている。

(IJ は図 [7-11] の KT に一致します)

[図 8-1]

上の IJ は AC と密接な関係がありそう。

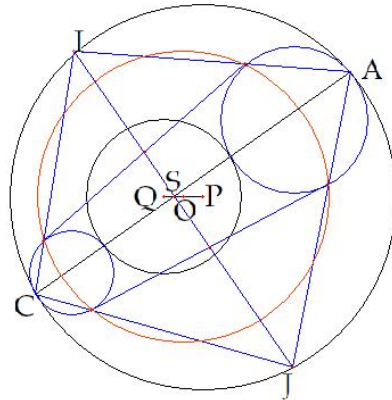
IJ を AC の「連れ合い」ということにします。



上の図において
E, F, G, H は
A の取り方によらず
定円の円周上にある。
その円の中心 O は
PQ の中点である。

(図 [7-14] の主張と同じ)

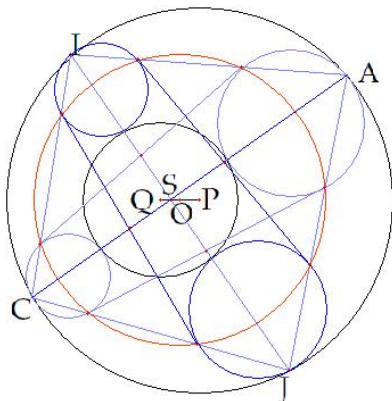
[図8-2]



E は線分 AI 上にある。

(図 [7-14] の主張の裏側だね)

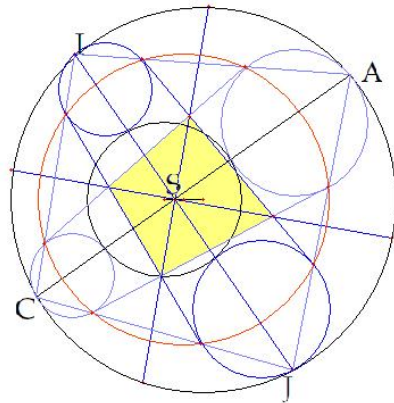
[図8-3]



IJ が AC の「連れ合い」のとき
AC は IJ の「連れ合い」である。

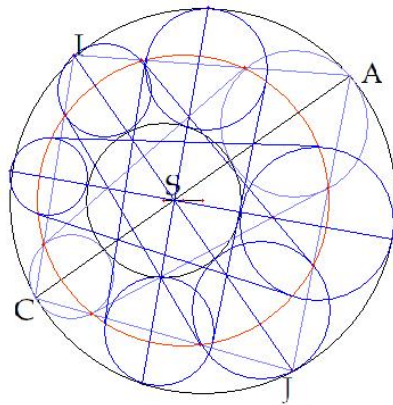
AC と IJ は「連れ合い」である。
といってもいいね。

[図8-4]



大円のSを通る弦ACに付随する
2円の2本の接線と
ACの「連れ合い」に付随する
2円の2本の接線とで
作られる四辺形を考える。
その対角線を通る大円の弦が
2本できる。
その2本の弦は共にSを通る。

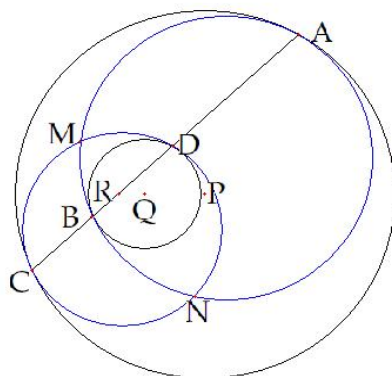
[図8-5]



[図8-5]で得られた2本の弦は
互いに他の「連れ合い」である。
この「連れ合い」を元の「連れ合い」に
部随する
「連れ合い」ということにする。
「連れ合い」に部随する「連れ合い」に
部随する
「連れ合い」はもとの連れ合いである。

[図8-6]

9 円の中の円続き 2

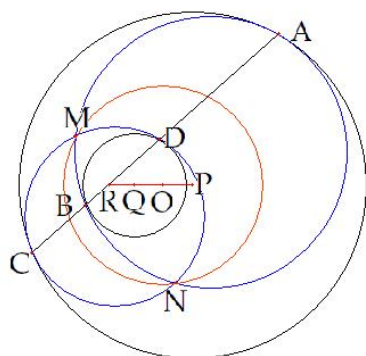


大円の中に小円があり
大円の中にあり大円に接し
小円を含み小円に接する円
について、再考しよう。
それは大円と小円の中心を
その半径の比に外聞する点を
R とおくと
そのような円は
R を通る弦により定まる。

R と通る弦に対してはその様な円は
2 円ある。

この 2 円をこの弦に付随する
2 円ということにする。

[図 9 - 1]

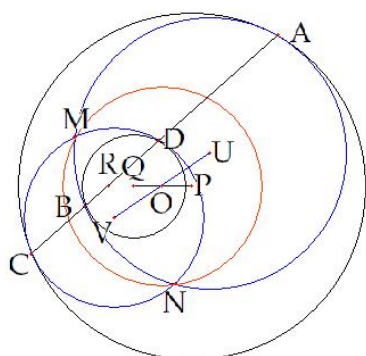


R を通る弦 AC に付随する 2 円の交点は
PQ の中点 O を中心とする円の
円周上にある。

この円は A の取り方によらず定円である。

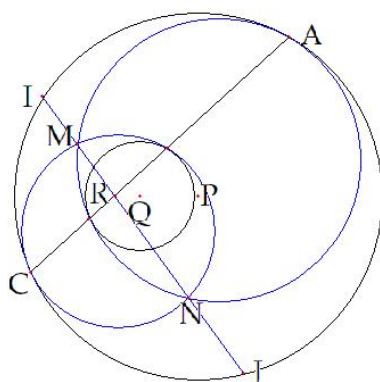
この円を大小 2 円 P, Q の定める円
とでもいうことにしましょう。

[図 9 - 2]



大小2円P, Qの定める円の中心は
Rを通る弦ACに付随する2円の中心の
中点である。

[図9-3]

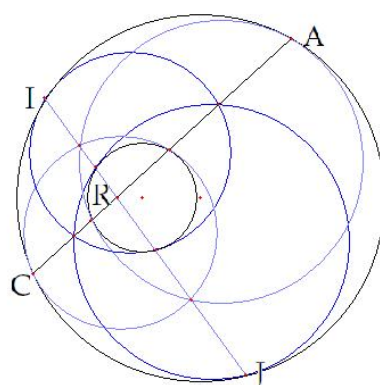


Rを通る弦に対して
それに付随する円の
2つの交点を通る大円の弦は
Rを通っている。

その弦を元の弦の「連れ合い」
ということにする。

図においては、IJは
ACの「連れ合い」である。

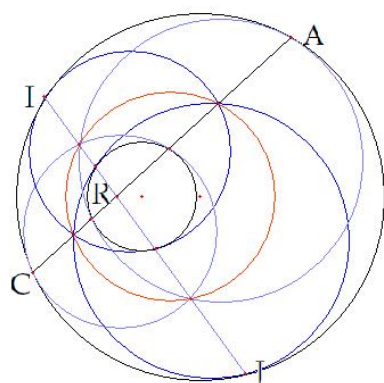
[図9-4]



IJがACの「連れ合い」のとき
ACはIJの「連れ合い」になっている。

その意味でAC, IJは「連れ合い」である
といっても良い。

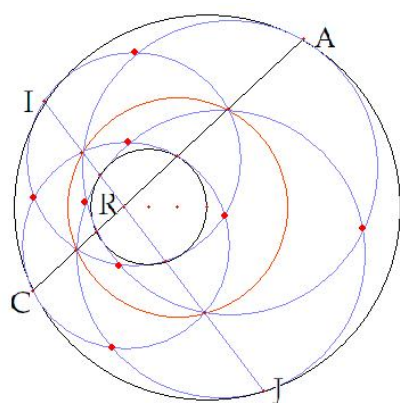
[図9-5]



弦 AC と IJ が「連れ合い」のとき
当然

AC に付随する 2 円の二つの交点
IJ に付随する 2 円の二つの交点
これら 4 点は大小 2 円 P, Q の
定める円の円周上にある。

[図 9 - 6]



弦 AC と IJ が「連れ合い」のとき
AC に付随する円と

IJ に付随する円との組み合わせは
4 組ある。

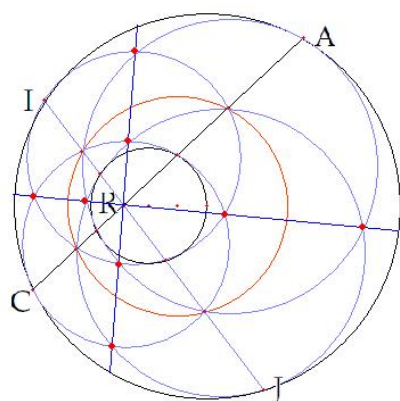
その各々に交点が 2 点ずつある。

計 8 点できる。

この 8 点を

「連れ合い」AC, IJ の定める
8 点ということにしよう。

[図 9 - 7]

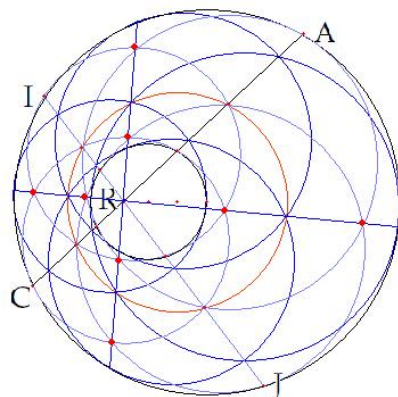


「連れ合い」の定める 8 点のうち
4 点ずつが

大円の R を通る弦上にある。

大円の R を通る 2 本の弦が定まる。

[図 9 - 8]

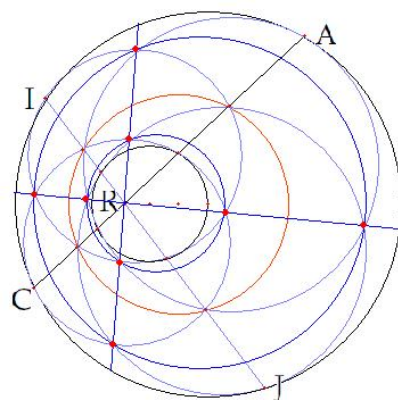


上の2本の弦は「連れ合い」になっている。

この「連れ合い」を
「連れ合い」AC, IJ の定める
「連れ合い」ということにする。

「連れ合い」の定める「連れ合い」の定める「連れ合い」は
始めの「連れ合い」に戻る。

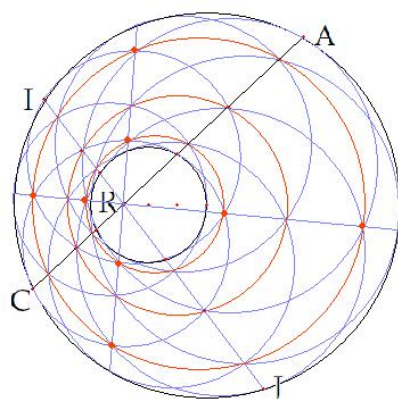
[図9－9]



「連れ合い」AC, IJ の定める8点の内
4点は小円を含み、円Oに含まれる
円の円周上にある
大小の2円が定まる。

各々「連れ合い」AC, IJ の定める
大円、小円ということにする。

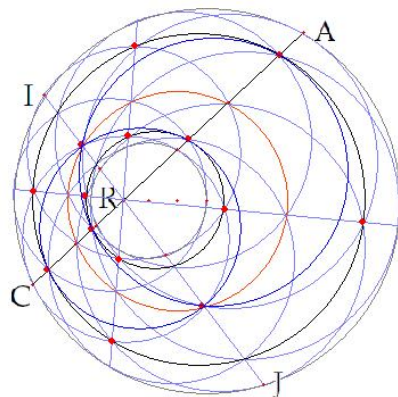
[図9－10]



「連れ合い」AC, IJ の定める
大円、小円と
「連れ合い」AC, IJ の「連れ合い」
の定める大円、小円とは
一致する。

この大小の2円は、「連れ合い」の
選び方によらず定まる。

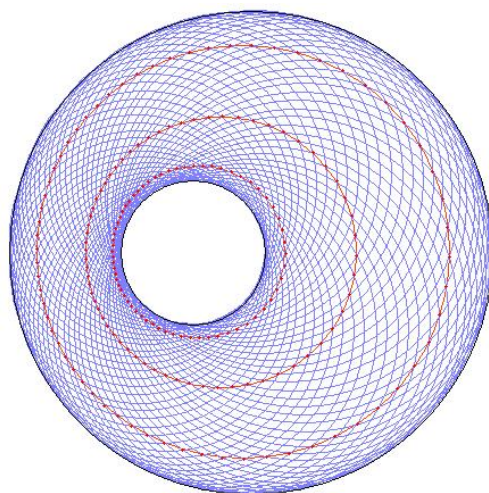
[図9－11]



大小2円P,Qの定める円と
「連れ合い」AC,IJの定める
大小2円の定める円とは
一致する。

大小2円に対して
その「連れ合い」の定める
大小2円をもとの2円の
子供2円ということにしよう。

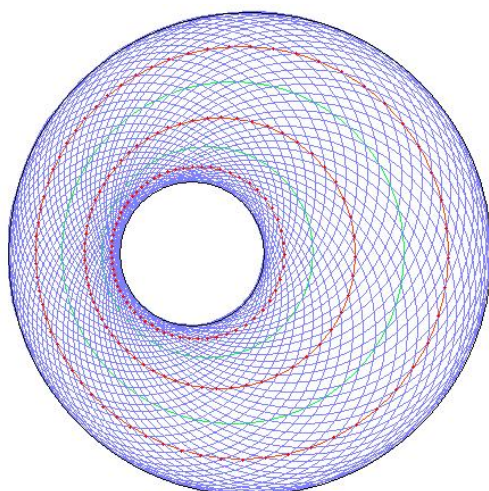
[図9-12]



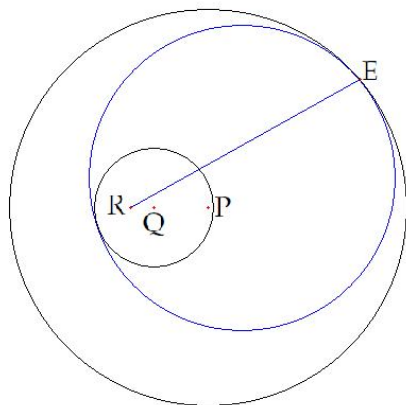
大小2円の定める円と
子供2円です。

子供ではダメかな？
ネーミングを変えないと！

[図9-13]

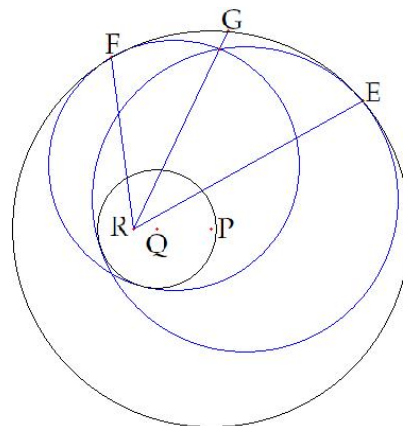


先ほどの図に
二つの円を追加しました。
どのような性質をもつ円なのか
今までの話を再構築しながら
調べて行こう。 [図9-14]



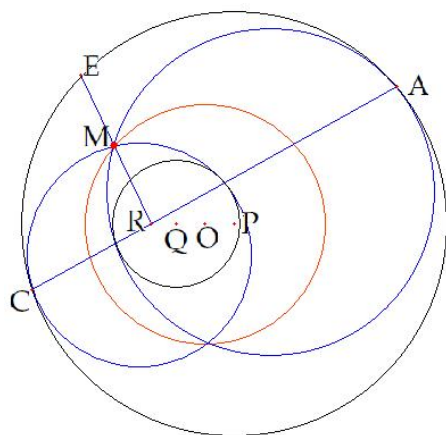
大円 P 上の点 E に対して
円 P と点 E で接し
円 Q を内部に持ち接している円を
ER で定まる円ということにする。

[図 9-1 5]



円 P 上の 2 点 E, F に対して
円 P 上の点 G で GR が
ER で定まる円と FR で定まる円との交点とを
通るものを考える。
ただし F, G, E が反時計回りに並ぶとする
このとき RG を ERF の擬二等分線と
いうことにする。

[図 9-1 6]

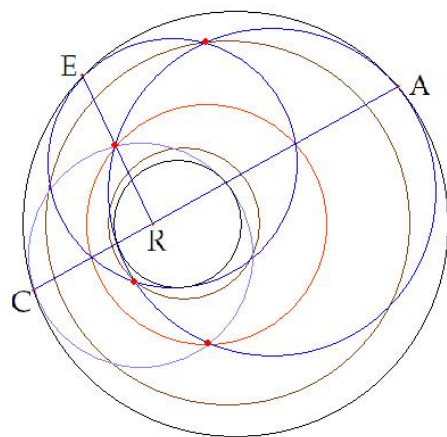


円 P の R を通る弦 AC に対して
AR で定まる円と
CR で定まる円との交点は
A の取り方によらず
定円上にある。

その円は PQ の中点を
中心とする円である。

その円を円 P と円 Q の
中円ということにする。

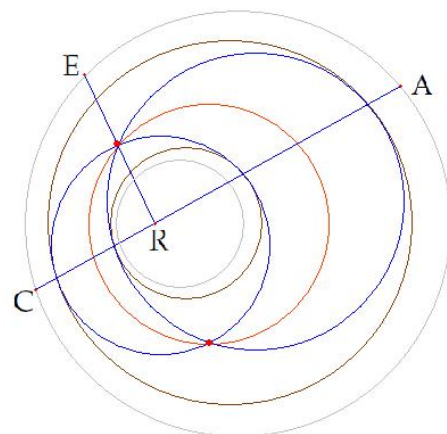
[図 9-1 7]



円PのRを通る弦ACに対して
ERをARCの擬二等分線とする。
ARで定まる円と
ERで定まる円との交点は
各々Aの取り方によらず
定円上にある。(二つの定円)

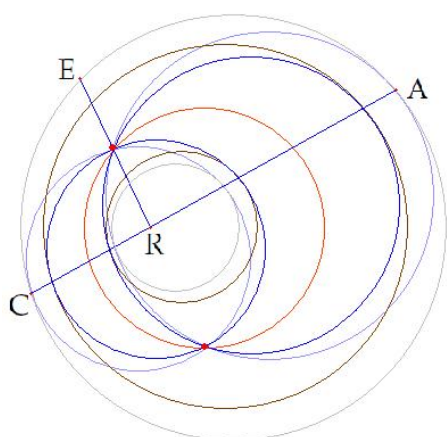
この大小の円を
円P,Qの擬90度の定める大小の円
ということにしよう。

[図9-18]



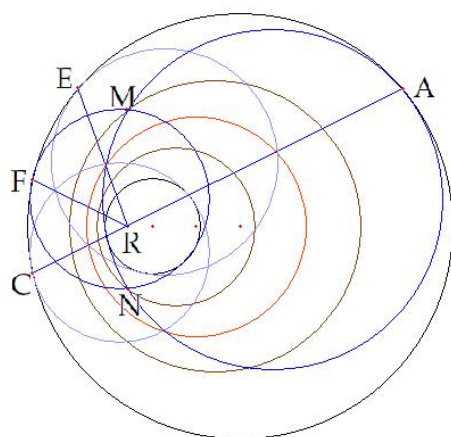
円P,Qの中円と
円P,Qの擬90度の定める大小の円
の
中円は一致する。

[図9-19]



こちらの図のほうが
分かりやすいかな？

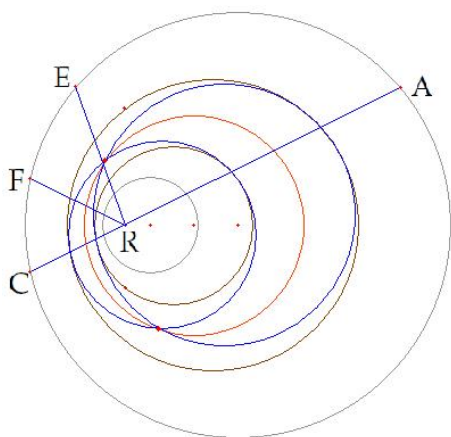
[図9-20]



円 P の R を通る弦 AC に対して
ER を ARC の擬二等分線とする。
FR を ERC の擬二等分線とする。
AR で定まる円と
FR で定まる円との交点は
各々 A の取り方によらず
定円上にある。(二つの定円)

この大小の円を
円 P, Q の擬 1/3 5 度の定める大小の
円
ということにしよう。

[図 9 - 2 1]



円 P, Q の中円と
円 P, Q の擬 1/3 5 度の定める大小の
円の
中円は一致する。

[図 9 - 2 2]

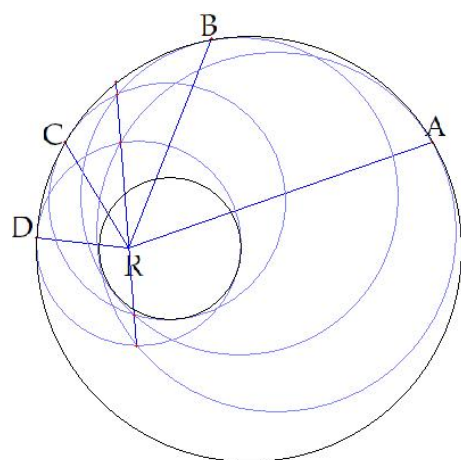
10 円の中の円続き (擬等角)

前の節の話を一一般化しよう (証明無しのお話です)

大円 P の中に小円 Q があり

R は PQ を大円小円の半径比に外分した点である。

擬等角という概念を展開しよう。

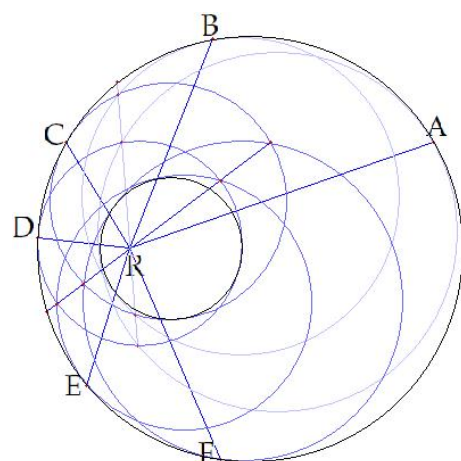


図のように、大円の円周上に点
A, B, C, Dがある。

BRC の擬中線と
ARD の擬中線が一致するとき

ARB と CRD は擬等である
ということにしよう。

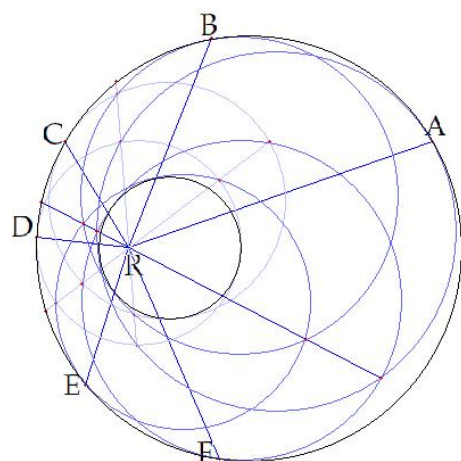
[図 1 0 - 1]



図において
ARB と CRD は擬等である
CRD と ERF は擬等である
このとき

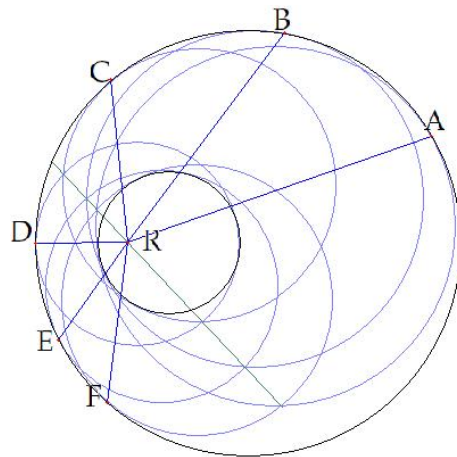
ARB と ERF は擬等になって
ほしいですね。

[図 1 0 - 2]



この図では
上の主張が正しそう
に見えます。

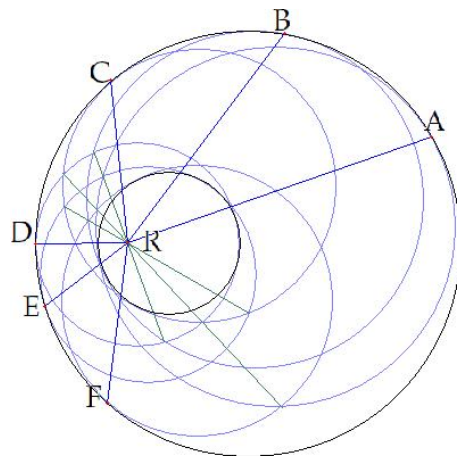
[図 1 0 - 3]



ARB と ERF が擬等で
BRC と DRE が擬等の時
ARC と DRF は擬等である

これは擬等の定義より明らかだね

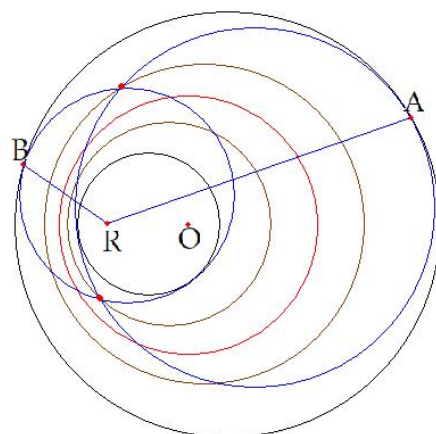
[図 1 0 - 4]



ARB と DRE が擬等で
BRC と ERF が擬等の時
ARC と DRF は擬等である

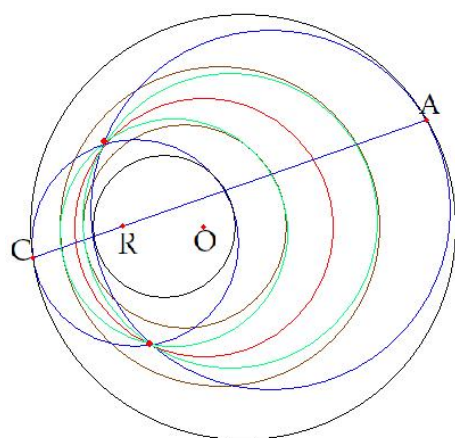
(図からは正しそうに見えます)

[図 1 0 - 5]



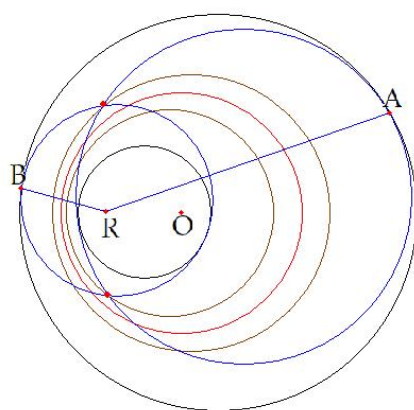
ある擬角が与えられたとき
ARB がその角と擬等の時
AR で定まる円と
BR で定まる円の
交点は、A の取り方によらず
始めに与えられた擬角に
依存する二つの大小の
定円上にある。

[図 1 0 - 6]

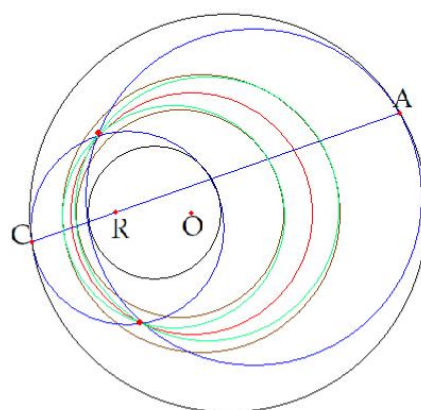


擬角が与えられたとき
 上図により、その擬角により
 定まる大小の円の中円は
 元の大小の円 P, Q の中円に一致する。

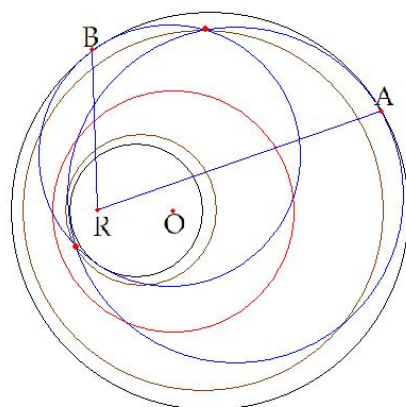
[図 1 0 - 7]



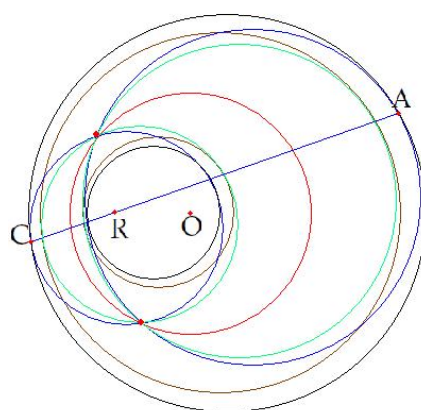
大きい擬角が与えられた時の図
 [図 1 0 - 8]



[図 1 0 - 9]



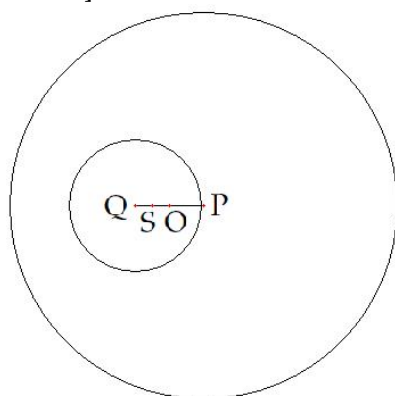
小さい擬角が与えられた時の図
 [図 1 0 - 1 0]



[図 1 0 - 1 1]

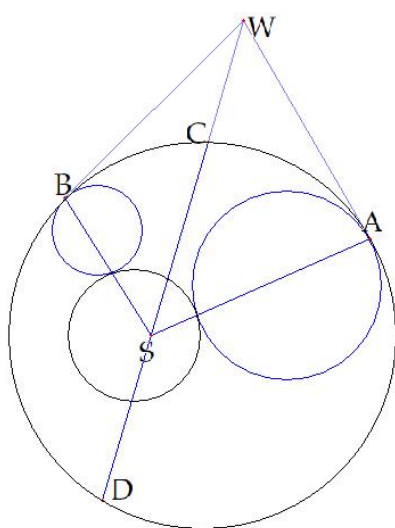
11 円の中の円続き (もう一つの型の擬等角)

前の節の話のアナロジーとして、大円に内接し小円に外接する円の関しての擬等角の話をして。[図 6-3]、[図 6-4] 及び [図 7-11] から [図 7-17] に関連した話です。



今までと同様に、大円 P の中に小円 Q が入っていて (同心円ではない)、 S は PQ を大円 P の半径と小円 Q の半径の比に内分した点で O は PQ の中点とする。

[図 11-1]

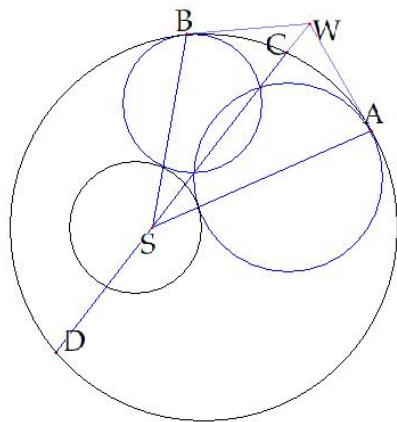


A, B, C, D を大円 P 上の点とする。
 A 及び B における大円 P の接線の交点を W とする。
 C, D, S, W が一直線線上にあるとして A, C, B, D が反時計回りに並んでいるとする。
 このとき

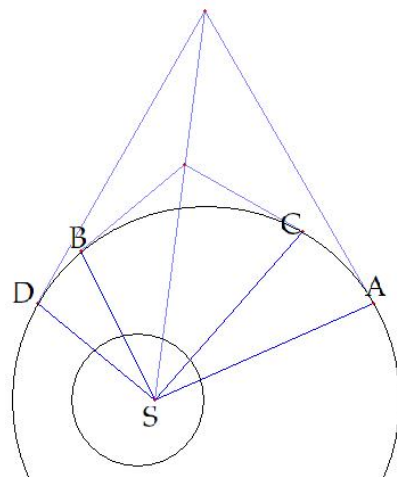
CS を ASB の中線といい
 DS を BSA の中線ということにする。

[図 11-2]

A 及び B における大円 P の接線が平行のとき
 CD はその接線と平行な S を通る大円 P の弦とする。

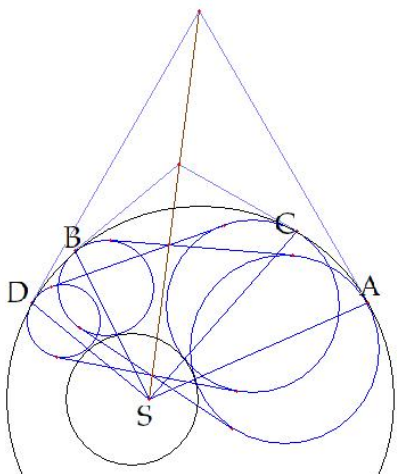


上の定義において
AS で定まる円と BS で定まる円が
交わる時
CD はその交点を通っている弦である。

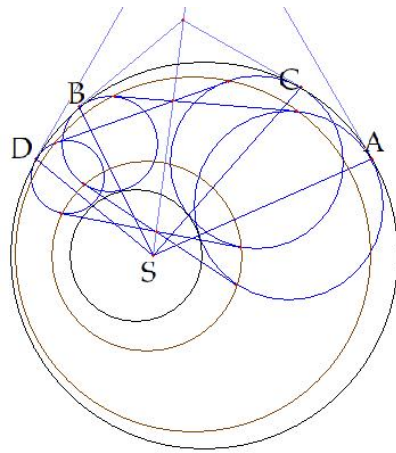


A, B, C, D を大円 P 上の点とする。
BSC の中線または CSB の中線が
ASD の中線と一致しているとき
ASB と CSD は擬等であるということに
する。

ASB と CSD が擬等るとき
ASC と BSD も擬等である。

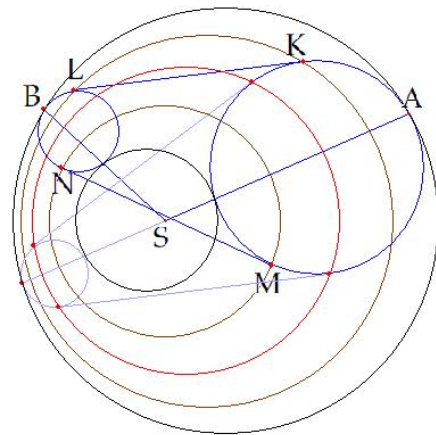


上の図に共通外接線を付け加えました。
中線上に交点に乗っている。
ように見えますね



ASB と CSD が擬等のとき
 AS で定まる円と BS で定まる円の
 2本の外接線の4個の接点
 及び
 CS で定まる円と DS で定まる円の
 2本の外接線の4個の接点
 の計8個の点のうち
 外側の4点及び内側4点は
 各々同一円周上にある。

[図11-6]

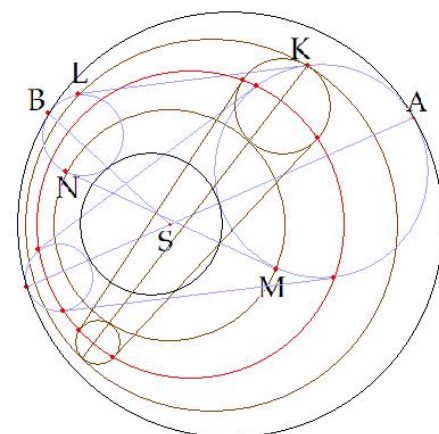


一つの擬角が与えられたとき
 ASB が与えられた擬角と擬等のとき
 AS で定まる円と BS で定まる円の
 2本の外接線の4個の接点のうち
 外側の2点及び内側の2点は
 各々 A の取り方によらない
 定円上にある

ASB が一直線上にないとき
 大円と小円が定まる。

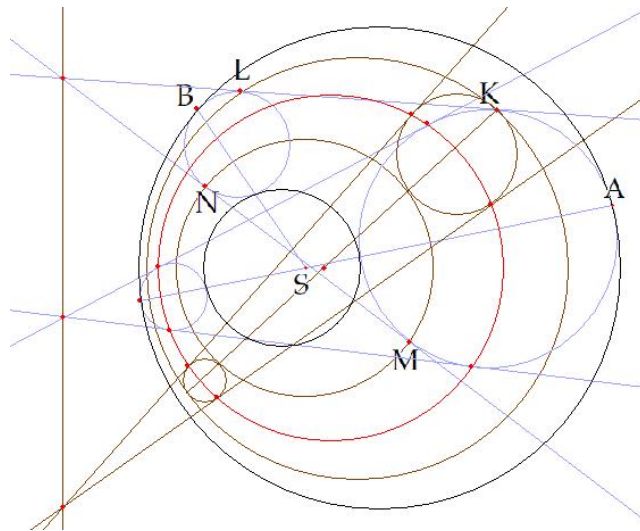
ASB が一直線上にあるときは
 一つの円、中円が定まる。

[図11-7]



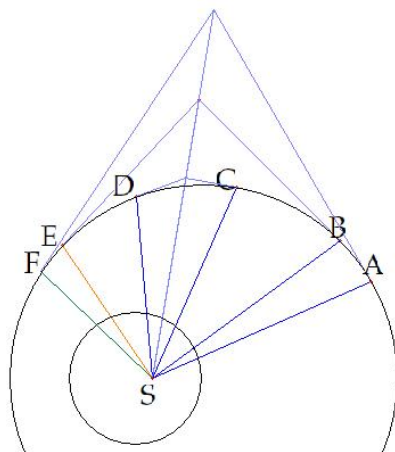
一つの擬角 (平角ではない) が与えら
 れたとき
 上のように、
 その擬角で定まる大小の円の中円と
 元の大小の円の中円とは一致する。

[図11-8]



この図からも
物語が
できそうですね

[図 1 1 - 9]

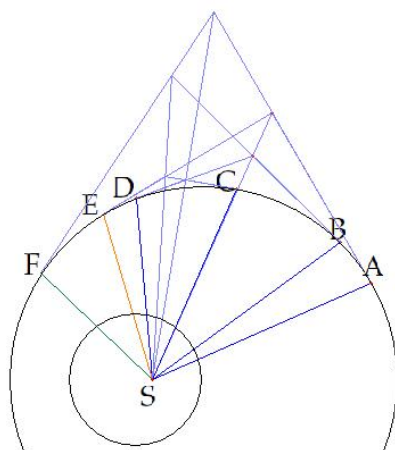


次は擬等という言葉を使っても
良いことを保証する図です。

BSC と DSE は擬等で
ASB と ESF が擬等のとき
ASC と DSF は擬等である。

定義より明らかですね。

[図 1 1 - 1 0]



ASB と DSE は擬等で
BSC と ESF が擬等のとき
ASC と DSF は擬等である。

図から正しそうに見えます。

[図 1 1 - 1 1]