数学A

複素数の導入

この講義では実数までは知っていると仮定しておく。

記法 (実数体までの記法)

(1)　自然数全体のなす集合を $\mathbb{N}$ で表わす。

(2)　整数全体のなす集合を $\mathbb{Z}$ で表わす。
　　$\mathbb{Z}$ を整数環という。

(3)　有理数全体のなす集合を $\mathbb{Q}$ で表わす。
　　$\mathbb{Q}$ を有理数体という。

(4)　実数全体のなす集合を $\mathbb{R}$ で表わす。
　　$\mathbb{R}$ を実数体という。

次は少し荒っぽい表現である。

注意 (環と体)

(1)　和、差、積が自由に行える集合を環という。

(2)　四則演算 (和、差、積、商) が自由に行える集合を体という

数の世界を広げて、二乗すると -1 になるものを一つ考える。 それを $\sqrt{-1}$ で表わす。
二つの実数 a, b に対して
$a + b\sqrt{-1}$
なるものを、複素数という。
複素数には次の約束をする。

約束　$\mathbb{R} \ni a, b, c, d$ のとき

(0)　$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1} \iff a = c$ かつ $b = d$

(1)　$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}$

(2)　$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}$

(3)　$a + 0\sqrt{-1}$ と実数 a を同一して実数も複素数とみる。

(4)　$0 + b\sqrt{-1}$ を単に $b\sqrt{-1}$ と表わす。
　このような複素数を純虚数という。

注意 (虚数単位 i)

$\sqrt{-1}$ を i で表わすことが多い。

記法 (複素数の記法)

複素数全体のなす集合を $\mathbb{C}$ で表わす。
$\mathbb{C}$ は複素数体と呼ばれる。

注意

(1)　$\mathbb{C} = \{a + bi \mid \mathbb{C} \ni a, b\}$

$\mathbb{R} \ni a, b, c, d$ のとき

(2)　$a + bi = c + di \iff a = c$ かつ $b = d$

(3)　$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

(4)　$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

(5)　$a + 0i = a$

(6)　$0 + bi = bi$

さらに次が成り立つ。

注意

(7)　$\mathbb{C}$ は可換環をなす。

$\mathbb{R} \ni a, b, c, d$ のとき

(8)　$a + bi = 0 \iff a = b = 0 \iff a^2 + b^2 \neq 0$

(9)　$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

(10)　$a + bi \neq 0$ のとき

$$(a + bi)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right) = 1$$

(11)　$c + di \neq 0$ のとき

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

(12)　$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ を部分体にもつ体である。

注意 ($\sqrt{-2}$)

a が正の実数のとき $\sqrt{-a}$ でもって $\sqrt{a}i$ を表わすことにする。

次の定理は証明はここではしないが $\mathbb{C}$ を特徴づける定理である。

定理 (**代数学の基本定理**) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$

を複素数係数の n 次の多項式とする。($\mathbb{C} \ni a_0, a_1, \cdots, a_n$ で $a_0 \neq 0$)

このとき、方程式 $f(x) = 0$ は $\mathbb{C}$ の中に解をもつ。

($\mathbb{C} \ni^{\exists} \alpha \ s.t. \ f(\alpha) = 0$)

系 (**代数学の基本定理の系**)

$f(x)$ を複素数係数の n 次の多項式 $(n \geq 1)$ とする。このとき

$\mathbb{C} \ni^{\exists} a, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ s.t. $f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_1)$

が成り立つ。

注意 (**２次方程式の解**)

二次方程式 $ax^2 + bx + c$ の解は $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ である。

(複素数 z に対しては $\sqrt{z}$ で二乗すると z になる数の一つを表わしているとする。)

共役複素数と長さ (絶対値)

定義 (共役複素数)
複素数 z を実数 a と b を用いて
　$z = a + bi$ と表わしたとき
$a - bi$ なる複素数を z の共役といい $\bar{z}$ で表わす。

複素数の共役については次が成り立つ。

命題　z や w を複素数とするとき、次が成り立つ。
(0)　$\bar{\bar{z}} = z$
(1)　$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
(2)　$\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$
(3)　$\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$
(4)　$\overline{(\frac{w}{z})} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$　$(z \neq 0$ のとき)
(5)　z が実数 $\Longleftrightarrow \bar{z} = z$
(6)　z が純虚数 $\Longleftrightarrow \bar{z} = -z$

証明　明らかであるが一応証明を与えておく。
実数 a, b, c, d を用いて $z = a + bi,\ w = c + di$ と表わしておく。
(0)　$\bar{z} = a - bi = a + (-b)i$ なので
$\bar{\bar{z}} = a - (-b)i = a + bi = z$
(1)　$\overline{z+w} = \overline{(a+c) + (b+d)i} = (a+c) - (b+d)i$
　$= (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$
(2)　$\overline{z-w} + \bar{w} = \overline{(z-w) + w} = \bar{z}$
(3)　$\overline{zw} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$
　$= (a - bi)(c - di) = \bar{z}\,\bar{w}$
(4)　$\overline{(\frac{w}{z})}\bar{z} = \bar{w}$
(5)　$\bar{z} = z \Longleftrightarrow b = 0$
(6)　$\bar{z} = -z \Longleftrightarrow a = 0$

複素数の長さ (絶対値)
複素数 z を実数 a と b を用いて
　$z = a + bi$ と表わしたとき
　$\sqrt{a^2 + b^2}$ を z の長さといい $|z|$ で表わす。
z の長さを z の絶対値ともいう。

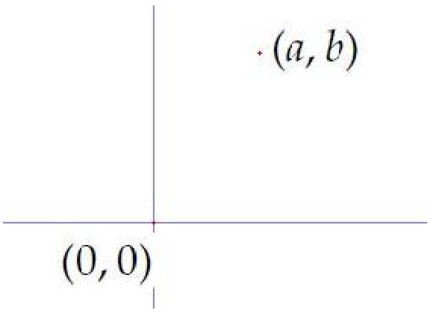
命題　z や w を複素数とするとき、次が成り立つ。
(0)　$a,\ b$ を実数とするとき $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$
(1)　$(|z|)^2 = z\bar{z}$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
(2)　$|zw| = |z||w|$
(3)　$|z| = 1$ のとき $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$ である。

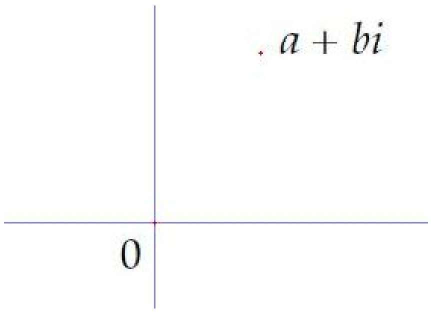
(4)　$|\frac{w}{z}| = \frac{|w|}{|z|}$　($z \neq 0$ のとき)
(5)　$|z+w| \leq |z|+|w|$
(6)　$|z|-|w| \leq |z-w|$

証明　明らかであるが一応証明を与えておく。
実数 a,b,c,d を用いて $z=a+bi,\ w=c+di$ と表わしておく。
(1)　$(|z|)^2 = a^2+b^2$ で $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ より明らか。
(2)　$(|zw|)^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\,\overline{w} = z\bar{z}w\overline{w} = (|z|)^2(|w|)^2 = (|z||w|)^2$
(3),(4)　(2) より明らか
(5)　$(|z|+|w|)^2-(|z+w|)^2 = (\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2})^2-((a+c)^2+(b+d)^2)$
$= 2(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}-(ac+bd))$
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 = (ad-bc)^2 \geq 0$
より求める結果を得る。
(6) (5) より明らか

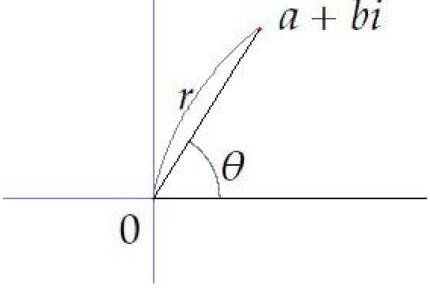
定義 (複素数平面 (長さと偏角))

座標平面の点 (a,b) に対して複素数 $a+bi$ を対応させて座標平面を複素数全体のなす集合と同一させたとき、この平面を複素平面という。



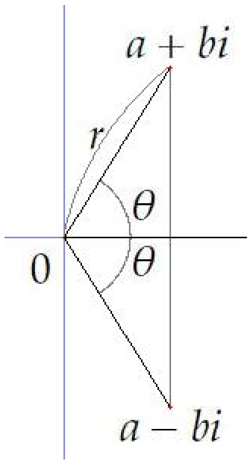


座標平面での x 軸にある点は複素平面では実数に対応し、座標平面で y 軸にある点は複素平面では純虚数に対応する。
複素平面で実数全体のなす集合 (座標平面では x 軸に対応) を実軸 (実数軸) といい純虚数全体のなす集合 (座標平面では y 軸に対応) を純虚数軸という。

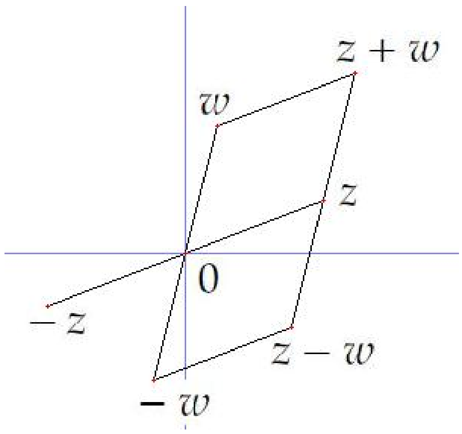


実数の組 (a,b) に対して原点 $(0,0)$ と点 (a,b) との距離は $\sqrt{a^2+b^2}$ である。従って複素数 $a+bi$ の長さは $\sqrt{a^2+b^2}$ であったが、これは複素平面においては、0 と $a+bi$ との距離である。

定義 (偏角)　0 でない複素数 z に対して、実軸の正の部分から 0 と z を結ぶ線分迄反時計回りに計った角を z の偏角という。z の偏角を $arg\, z$ で表わす。



注意　a, b を実数とし、$z = a + bi$ とする。
$z \neq 0$ とする。
r を z の長さ $|z|$ とし
θ を z の偏角 $argz$ とする。
このとき、次が成り立つ
(1)　$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ r = \sqrt{z\bar{z}}$
(2)　$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta$
　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
(3)　偏角は 2π の整数倍の違いを無視して定まる。
(4)　$|\bar{z}| = |z| = r$
(5)　$arg\,\bar{z} = -arg\, z = -\theta$



z と w を 0 と異なる複素数とするとき
複素平面において次が成り立つ。
(1)　z と $-z$ は 0 に関して点対称である。
w が z の実数倍でないとき
(2)　$0,\ z,\ z + w,\ w$ は平行四辺形をなす。
(3)　$0,\ z,\ z - w,\ -w$ は平行四辺形をなす。

複素数の積と偏角

三角関数の和の公式を思い出しておこう

三角関数の和の公式　次が成り立つ

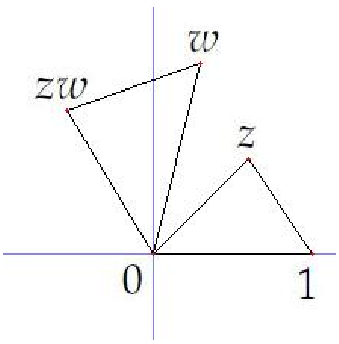
$\sin(\theta + \eta) = \sin(\theta)\cos(\eta) + \cos(\theta)\sin(\eta)$
$\cos(\theta + \eta) = \cos(\theta)\cos(\eta) - \sin(\theta)\sin(\eta)$\$

上の公式より、次が成り立つ
r, s を正の実数 θ, η を実数として
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$w = s(\cos\eta + i\sin\eta)$
とするとき

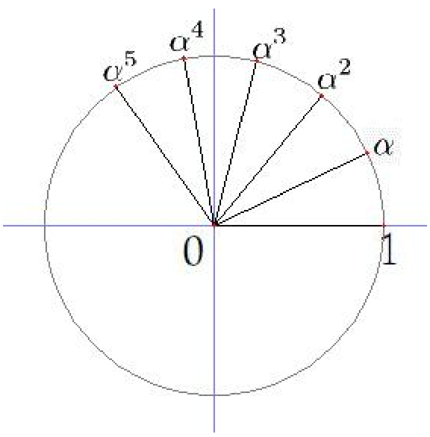
$zw = r(\cos(\theta + \eta) + i \sin(\theta + \eta))$
が成り立つ。
定理の形に述べれば次が成り立つ。

定理 (複素数の積)
z, w を複素数とするとき
(1) $|zw| = |z||w|$
$z \neq 0,\ w \neq 0$ のとき
(2) $arg\, zw = \arg z + arg\, w$
が成り立つ。つまり、次が成り立つ。
複素数の積において
長さは長さの積になり、偏角は偏角の和になる

複素数の商 z, w を複素数とし $z \neq 0,\ w \neq 0$ とするとき
(1) $|\frac{w}{z}| = \frac{|w|}{|z|}$
(2) $arg\, \frac{w}{z} = arg\, w - arg\, z$
が成り立つ。

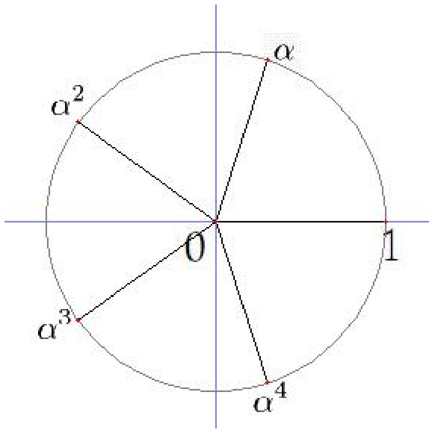


図において
$1, z, w, zw, 0$ に対応する点を
各々 A, B, C, D, O とすると
AO = 1, BO = $|z|$, CO = $|w|$, DO = $|zw|$ なので
AO : BO = CO : DO
また
∠ AOB = ∠ COD
なので
△ AOB と △ COD は相似である
が成り立つ。



積の定理から次を得る。

定理 (ド・モアブルの定理)
θ を実数、 n を整数とするとき、
次が成り立つ。
$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

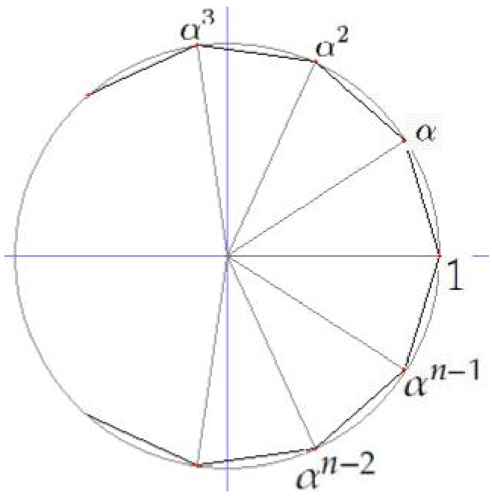


例 (1 の 5 乗根)　α を長さが 1 で偏角が $\dfrac{2\pi}{5}$ $(= 72^\circ)$ の複素数とすると
$\alpha^5 = 1$ である。
よって、全ての整数 m に対して
$(\alpha^m)^5 = 1$ である。
$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ は各々偏角が $0, \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \dfrac{6\pi}{5}, \dfrac{8\pi}{5},$ であるので全て相異なり、全て方程式 $x^5 - 1 = 0$ の解である。

$x^5 - 1 = 0$ の解は高々 5 個しかないので
$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ は方程式 $x^5 - 1 = 0$ の解の全てであり
従って
$x^5 - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)(x-\alpha^4)$
と因数分解される。

同様にして、次の定理を得る。

定理 (1 の n 乗根)　n を自然数とし α を長さが 1 で偏角が $\dfrac{2\pi}{n}$ $\left(= \dfrac{360^\circ}{n}\right)$ の複素数とするとき、次が成り立つ。
(1)　1 の n 乗根即ち、方程式 $x^n - 1 = 0$ の解は
$1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ の n 個である。
(2)　$n \geq 3$ のとき、$1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$ は複素平面において、単位円 (0 を中心とし半径 1 の円) に内接する正 n 角形の頂点である。
(3)　$x^n - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1})$



複素平面において
単位円 (0 を中心として半径 1 の円) に内接し
1 を頂点の一つとする
正 n 角形の頂点に対応する
n 個の複素数が
1 の n 乗根である。

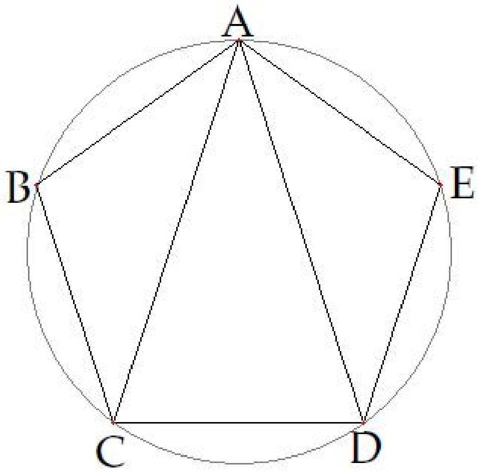
命題 ($x^n - a = 0$ の解)

$a \neq 0$ とする。方程式 $x^n - a = 0$ の解について、
a の長さを r, 偏角を θ とするとき

$$\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta + 2m\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2m\pi}{n}) \quad (m = 0, 1, \cdots, n-1)$$

がその方程式の解である。

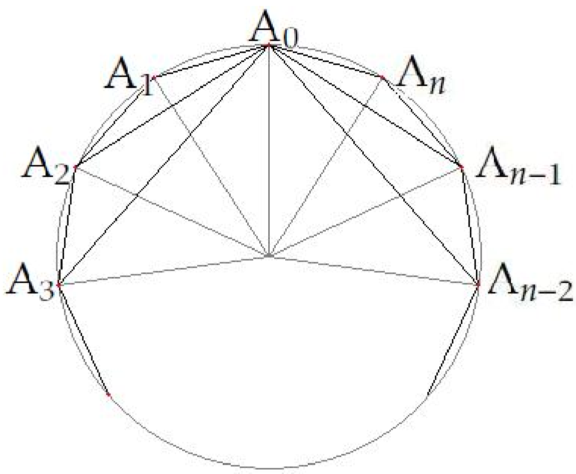
証明　$\beta = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin)\frac{\theta}{n}$ とおくと
$\beta^n = r(\cos\theta + i\sin\theta) = a$ となる。
$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}$ とおくと
全ての整数 m に対して $(\beta\alpha^m)^n = a$ である。
$\beta, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \cdots, \beta\alpha^{n-1}$ は n 個の $x^n - a = 0$ の解である。

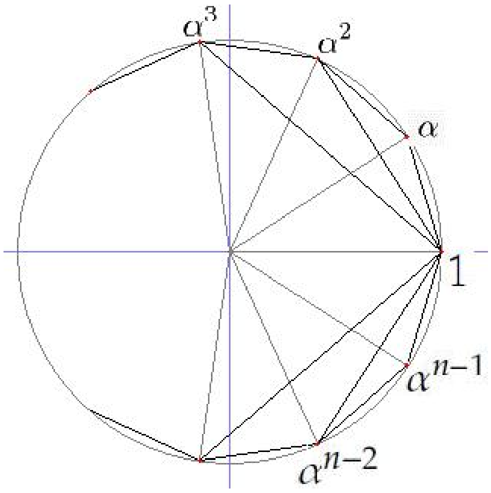


例題　半径１の円に内接する
正５角形 ABCDE において
AB × AC × AD× AE = 5
である。

この話は一般的に成り立つ。

　半径１の円に内接する
正 n 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ において
$A_0A_1 \times A_0A_2 \times \cdots \times A_0A_n = n$
が成り立つ。





解答　一般の場合で証明しよう。

$\alpha \ = \ \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。

$f(x) \ = \ x^n - 1$ とし

$g(x) \ = \ (x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1})$

とおくと

$f(x) \ = \ (x-1)g(x)$ である。

よって

$nx^{n-1} \ = \ f'(x) \ = \ g(x)+(x-1)g'(x)$

これに $x = 1$ を代入して

$$g(1) \ = \ n$$

を得る。

$n \ = \ |g(1)|$

$\quad = \ |1-\alpha||1-\alpha^2|\cdots|x-\alpha^{n-1}|$

これより、求める結果を得る。

代数方程式の解

$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 複素数とする。 このとき、方程式

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ = \ 0$$

を n 次方程式という。 特に、$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ が実数のとき、実係数の n 次方程式という。

代数数学の基本定理は全ての n 次方程式は複素数の範囲では必ず解をもつこと、また 重複度も考慮すると丁度 n 個持つことを保証している。　しかしこの定理は、解の公式が存在することを保証していいるわけではない。

１次方程式や２次方程式に解の公式は良く知られている。

後で記述するように、３次方程式や４次方程式には解の公式が存在する。

５次以上の方程式には解の公式が存在しないことが知られている。(1800 年代の前半)

現在では５次以上の方程式には解の公式が存在しないことはガロア理論 (群論、体論等の抽象代数学をふんだんに使う) を使って示す。

では３次方程式の解法に向かおう。

３次方程式の解法

次に複素数係数の３次方程式が代数的に解けることを示そう。これは、実際に解くことよりも、解けるということが理論的に分かることに主眼がおいてある。

解法のあらすじ

方程式 $x^3+ax^2+bx+c = 0$
は次のステップで理論的に解ける。
$f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ 置き $h(x) = f(x-\frac{a}{3})$ とおくと
$h(x)$ の x^2 の係数は 0 になる。
$h(x) = 0$ の解から $\frac{a}{3}$ 引いたものが $f(x) = 0$ の解になる。
$h(x) = x^3-3px-2q$ とすると
$h(\alpha+\beta)$ を計算すると $(\alpha^3+\beta^3-2q)+3(\alpha+\beta)(\alpha\beta-p)$ となる。
α, β が $\begin{cases} \alpha^3+\beta^3 &= 2q \\ \alpha\beta &= p \end{cases}$ を満たせば
$\alpha+\beta$ は $h(x) = 0$ の解になる。
実際、そのような α, β を求めることができる。

以下は上のプログラムを実際詳しく述べたものである。興味ある人は読むと良いでしょう。

a, b, c を複素数とし $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ を３次の多項式とする。
３次方程式

$$f(x) = 0$$

の解法について考えよう。
解は重複を含めて３個有ることはもう既に知っている。

$$h(x) = f(x-\frac{a}{3})$$

とおくと

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3-ax^2+\frac{a^2}{3}x-\frac{a^3}{27}+ax^2-\frac{2a^2}{3}x+\frac{a^3}{9}+bx-\frac{ab}{3}+c \\ &= x^3+(b-\frac{a^2}{3})x+c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27} \end{aligned}$$

なので $-3p = b-\frac{a^2}{3}$, $-2q = c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}$ とおくと

$$h(x) = x^3-3px-2q$$

となる。
ξ を方程式

$$h(x) = 0$$

の解とすると

$$f(\xi-\frac{a}{3}) = h(\xi) = 0$$

となるので $\xi-\frac{a}{3}$ は方程式

$$f(x) = 0$$

の解になる。
方程式

$$h(x) = 0$$

の解が解ければ、方程式

$$f(x) = 0$$

が解けることになる。
方程式

$$h(x) = 0$$

つまり、方程式

$$x^3 - 3px - 2q = 0$$

を解くことにする。
$p = 0$ の時は簡単に解けるので、$p \neq 0$ とする。
かなり技巧的であるが

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= (\alpha+\beta)^3 - 3p(\alpha+\beta) - 2q \\ &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 3p(\alpha+\beta) - 2q \\ &= (\alpha^3 + \beta^3 - 2q) + 3(\alpha+\beta)(\alpha\beta - p) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = 2q \\ \alpha\beta = p \end{cases}$$

を満たす α, β が見つかれば、$\alpha+\beta$ が $f(x) = 0$ の解である。
α, β が上記の式を満たしたとすると

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = 2q \\ \alpha^3\beta^3 = p^3 \end{cases}$$

が成り立つ。
$(\alpha^3 - \beta^3)^2 = 4(q^2 - p^3)$
である。γ を
$\gamma^2 = q^2 - p^3$
を満たす複素数の一つとする。
(普通 $\sqrt{q^2 - p^3}$ を選ぶ、又は $\sqrt{q^2 - p^3}$ と記す)
$q+\gamma,\ q-\gamma$ が α^3, β^3 になる。
以上の考察のもと方程式をといてみよう。
$z^3 - (q+\gamma)$ の一つを α_1 とおく。
(普通 $\sqrt[3]{q+\gamma}$ を選ぶ、又は $\sqrt[3]{q+\gamma}$ と記す)
$\alpha_1^3(2q - \alpha_1^3) = (q+\gamma)(q-\gamma) = q^2 - \gamma^2 = q^2 - (q^2 - p^3) = p^3$
であり、$p \neq 0$ なので $\alpha_1 \neq 0$ である。
$\beta_1 = \dfrac{p}{\alpha_1}$ とおく。

$$\alpha_1\beta_1 = p$$

である。

$$\alpha_1^3\beta_1^3 = p^3 = \alpha_1^3(2q - \alpha_1^3),\ \alpha_1 \neq 0$$

なので $\beta_1^3 = 2q - \alpha_1^3$
つまり

$$\alpha_1^3 + \beta_1^3 = 2q$$

以上より

$$\begin{cases} \alpha_1^3+\beta_1^3 &= 2q \\ \alpha_1\beta_1 &= p \end{cases}$$
を満たす
従って $\alpha_1+\beta_1$ が $h(x) = 0$ の解の一つである。
$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ とおくと $1, \omega, \omega^2$ は 1 の 3 乗根である。このとき
$$\begin{cases} (\omega\alpha_1)^3+(\omega^2\beta_1)^3 &= 2q \\ (\omega\alpha_1)(\omega^2\beta_1) &= p \end{cases}$$
および
$$\begin{cases} (\omega^2\alpha_1)^3+(\omega\beta_1)^3 &= 2q \\ (\omega^2\alpha_1)(\omega\beta_1) &= p \end{cases}$$
を満たす。
従って $\omega\alpha_1+\omega^2\beta_1,\ \omega^2\alpha_1+\omega\beta_1$ も $h(x) = 0$ の解である。
実際 $\omega^3 = 1,\ 1+\omega+\omega^2$ のもと、計算すると
$$\begin{cases} (\alpha_1+\beta_1)+(\omega\alpha_1+\omega^2\beta_1)+(\omega^2\alpha_1+\omega\beta_1) &= 0 \\ (\alpha_1+\beta_1)(\omega\alpha_1+\omega^2\beta_1)+(\omega\alpha_1+\omega^2\beta_1)(\omega^2\alpha_1+\omega\beta_1)+(\omega^2\alpha_1+\omega\beta_1)(\alpha_1+\beta_1) &= -3p \\ (\alpha_1+\beta_1)(\omega\alpha_1+\omega^2\beta_1)(\omega^2\alpha_1+\omega\beta_1) &= 2q \end{cases}$$
となり、
$\alpha_1+\beta_1, \omega\alpha_1+\omega^2\beta_1,\ \omega^2\alpha_1+\omega\beta_1$ が
方程式
$$x^3-3px-2q = 0$$
の 3 つの解であることが分かる。

長い話であったが、後半の部分をまとめると、次の定理になる。

定理（**3次方程式** $x^3-3px-2q = 0$ **の解** $(p \neq 0)$）
$\alpha = \sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}},\ \beta = \dfrac{p}{\alpha}$ とおくと
$\alpha+\beta,\ \omega\alpha+\omega^2\beta,\ \omega^2\alpha+\omega\beta,$
が方程式
$$x^3-3px-2q = 0$$
の 3 つの解である。

この３次方程式の解き方は、解が簡単なものでも、得られた答えが簡単に見えない欠点がある。実用性はかなり低いものである。あくまで理論的なものと思ってよい。

４次方程式の解法

３次の方程式が代数的に解けることを利用して、４次の方程式が代数的に解けることを、示そう。

４次の方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \; = \; 0$$
を解くことを考える。
$f(x) \; = \; x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ として、$h(x) \; = \; f(x - \dfrac{a}{4})$ とおくと
$h(x)$ の x^3 の係数は 0 であり $h(x) = 0$ の解より $\dfrac{a}{4}$ を引いたものが $f(x) \; = \; 0$ の解に成っている。
計算して $h(x) \; = \; x^4 + px^2 - qx + r$ になったとする。
方程式
$$x^4 + px^2 - qx + r \; = \; 0$$
の解が求められればよい。
$q \; = \; 0$ のときは簡単に解が求められるので $q \; \neq \; 0$ のときを考える。

定理 ($x^4 + px^2 - qx + r \; = \; 0$ **の解の求め方** ($q \; \neq \; 0$)**。**)
e ３次方程式
$$x^3 - px^2 - 4rx + 4pr - q^2 \; = \; 0$$
の解の一つとすれば
方程式
$$x^4 + px^2 - qx + r \; = \; 0 \text{ の解は}$$
２次方程式
$$x^2 - \sqrt{e-p}x - \frac{q}{2\sqrt{e-p}} + \frac{e}{2} \; = \; 0$$
の解と
$$x^2 + \sqrt{e-p}x + \frac{q}{2\sqrt{e-p}} + \frac{e}{2} \; = \; 0$$
の解を合わせたものである。

この定理を二通りの方法で証明しよう。

証明１
$$x^4 + px^2 - qx + r \; = \; 0$$
とおいて、 x を求める。
$$x^4 = -px^2 + qx - r$$
両辺 $ex + \dfrac{e^2}{4}$
を加える。
$$x^4 + ex^2 + \frac{e^2}{4} = (e-p)x^2 + qx - r + \frac{e^2}{4}$$
右辺が平方完成できるように e を選んでおく。つまり
$q^2 - 4(e-p)(-r + \dfrac{e^2}{4}) = 0$
となるように e を選んでおく。 即ち
$$e^3 - pe^2 - 4re + 4pr - q^2 \; = \; 0$$
となるように選んでおく。
$q \; \neq \; 0$ であるので $e - p \; \neq \; 0$ である。
$-r + \dfrac{e^2}{4} \; = \; \dfrac{q^2}{4(e-p)}$ なので

$$(e-p)x^2+qx-r+\frac{e^2}{4} = (e-p)(x^2+\frac{q}{e-p}x+\frac{q^2}{4(e-p)^2}) = (e-p)(x+\frac{q}{2(e-p)})^2$$

である。よって 方程式は

$$(x^2+\frac{e}{2})^2 = (\sqrt{e-p}(x+\frac{q}{2(e-p)}))^2$$

となる。よって求める解は

$$x^2-\sqrt{e-p}x-\frac{q}{2\sqrt{e-p}}+\frac{e}{2} = 0$$

の解と

$$x^2+\sqrt{e-p}x+\frac{q}{2\sqrt{e-p}}+\frac{e}{2} = 0$$

の解を合わせたものである。

別解は興味がある人は読んでみてください。別解を与えるために、補題を用意しよう。

補題 方程式

$$x^4+px^2-qx+r = 0$$

の４つの解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とする

$$\beta_1 = \alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4,\ \beta_2 = \alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4,\ \beta_3 = \alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3$$

とおくと $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ は方程式

$$x^3-px^2-4rx+4pr-q^2 = 0$$

の解である。

補題の証明 $x^4+px^2-qx+r = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$

より

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4 = p \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = q \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = r \end{cases}$$

が成り立つ。(解と係数の関係)。よって

$$\begin{aligned}
&\beta_1+\beta_2+\beta_3 \\
&\quad = \alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3 = p \\
&\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3 \\
&\quad = (\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4) + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3) \\
&\qquad + (\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3) \\
&\quad = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4)-4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \\
&\quad = 0\times q-4r = -4r \\
&\beta_1\beta_2\beta_3-q^2 \\
&\quad = (\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3) \\
&\qquad - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2 \\
&\quad = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4)) \\
&\quad = r((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)^2-4(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4))
\end{aligned}$$

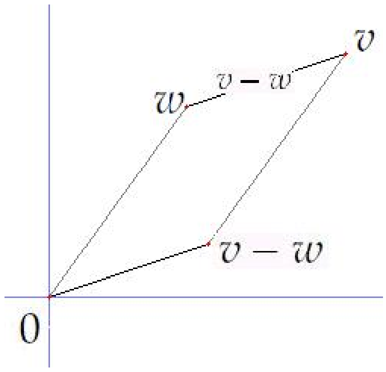
$$= -4rp$$
つまり
$\beta_1\beta_2\beta_3 = -4pr + q^2$
よって
$$(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3) = x^3-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)x^2+(\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3)x-\beta_1\beta_2\beta_3$$
$$= x^3 - px^2 - 4rx + 4pr - q^2$$
これは補題が成り立つことを意味している。

定理の証明２　補題より、解の順番を適当に入れ替えて
$$e = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4$$
と思ってよい
$p = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$
だったので
$$e - p = -\alpha_1\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4 = -(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$= (\alpha_1+\alpha_2)^2$$
解の順番を適当に入れ替えて
$$\sqrt{e-p} = \alpha_1 + \alpha_2,\ -\sqrt{e-p} = \alpha_3 + \alpha_4$$
としてよい
$$q = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4$$
$$= \alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4) + (\alpha_1+\alpha_2)\alpha_3\alpha_4) = (\alpha_1+\alpha_2)(-\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)$$
なので
$-\dfrac{q}{2\sqrt{e-p}} + \dfrac{e}{2} = \alpha_1\alpha_2,\ \dfrac{q}{2\sqrt{e-p}} + \dfrac{e}{2} = \alpha_3\alpha_4$ となる。
よって方程式
$$x^2 - \sqrt{e-p}x - \frac{q}{2\sqrt{e-p}} + \frac{e}{2} = 0$$
は方程式
$$x^2 - (\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2 = 0$$
となり、その解は α_1, α_2 であり
$$x^2 + \sqrt{e-p}x + \frac{q}{2\sqrt{e-p}} + \frac{e}{2} = 0$$
は方程式
$$x^2 - (\alpha_3+\alpha_4)x + \alpha_3\alpha_3 = 0$$
となり、その解は α_1, α_2 である。
よって、定理は証明された。

複素平面の平面幾何への応用

基本的な性質

複素平面での幾何を行う上での基本的な性質を述べて行くことにする。

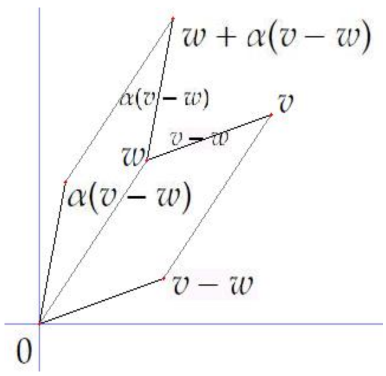


w からみた v

v と w を二つの複素数とするとき
w からみた v は

$$v-w$$

である。



w を中心にしての v の回転

w を中心にして v θ だけ回転した得られる複素数を u とすると

$$u-w = \alpha(v-w)$$

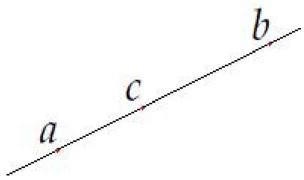
つまり

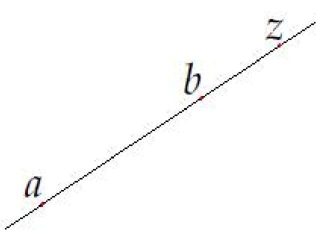
$$u = w+ \alpha(v-w)$$

である。ここで

$$\alpha = \cos\theta + i\ \sin\theta$$

(長さが 1 で偏角が θ の複素数)
である。





直線上の点　a, b を二つの異なる複素数とするとき

(1)　c が a と b を $s:t$ に内分する数のとき
$c = \dfrac{ta+sb}{s+t}$ である。

(2)　z が a と b を結ぶ直線上にあることと

$$z = a + t(b-a)$$

を満たす実数 t が存在することとは同値である。

(3)　z が a と b を結ぶ直線上にあることと $\dfrac{z-a}{b-a}$ が実数であることは同値である。

証明　(1)　c が a と b を $s:t$ に内分する数なので

$$c-a = \frac{s}{s+t}(b-a)$$

が成り立つ。

よって

$$c = a + \frac{s}{s+t}(b-a) = \frac{ta+sb}{s+t}$$

である。

(2) は明らかであり、(3) は (2) より明らかである。

注意 ($\frac{z-a}{b-a}$ が実数や純虚数に成る為の条件)

(1)　$\frac{z-a}{b-a}$ が実数である為の必要十分は、それとその共役が等しいことより

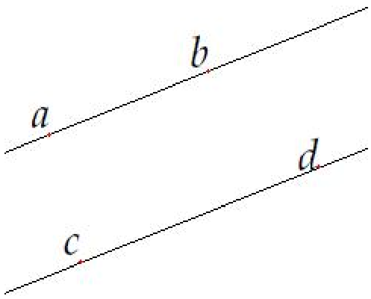
$$\overline{(z-a)}(b-a) = (z-a)\overline{(b-a)}$$

が成り立つことである。

(2)　$\frac{z-a}{b-a}$ が純虚数である為の必要十分は、その共役が元の -1 倍に等しいことより

$$\overline{(z-a)}(b-a) = -(z-a)\overline{(b-a)}$$

が成り立つことである。



平行条件　a, b を異なる複素数とし c, d を異なる複素数するととき

a と b を結ぶ直線と

c と d を結ぶ直線とが

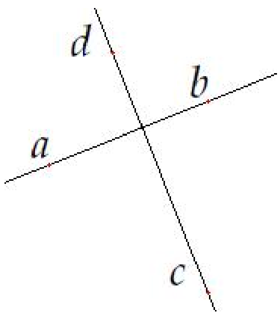
平行である為の必要十分条件は

$\frac{b-a}{d-c}$ が実数であること

即ち

$$\overline{(b-a)}(d-c) = (b-a)\overline{(d-c)}$$

が成り立つことである。



直交条件　a, b を異なる複素数とし c, d を異なる複素数するとき

a と b を結ぶ直線と

c と d を結ぶ直線とが

直交する為の必要十分条件は

$\frac{b-a}{d-c}$ が純虚数であること

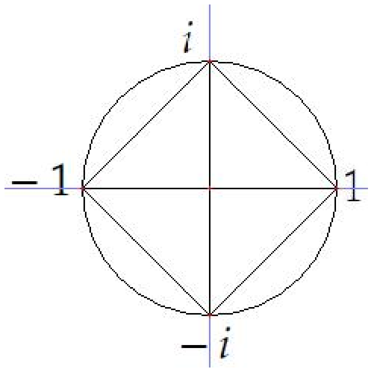
即ち

$$\overline{(b-a)}(d-c) = -(b-a)\overline{(d-c)}$$

が成り立つことである。

平面幾何の回転にかんする問題に対しては複素数を使って複素平面で考える

と有効な場合が多い。ここではいくつかの例でそれを見てみよう。

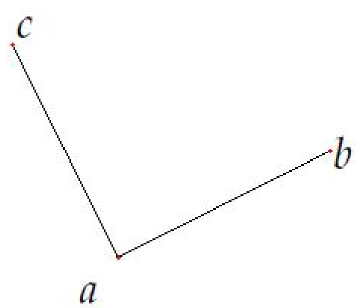


$90°$ の複素数

i は長さが 1 で
偏角が $90°$ の複素数である。

$-i$ は長さが 1 で
偏角が $-90°$ の複素数である。

従って反時計回りに $90°$ 回転させるためには i をかけ、時計回りに回転させるには $-i$ を掛ければよい。



$90°$ 回転　左の図において

c が a を中心にして b を
反時計回りに $90°$ 回転したものとき

$$c - a = i(b - a)$$

である。

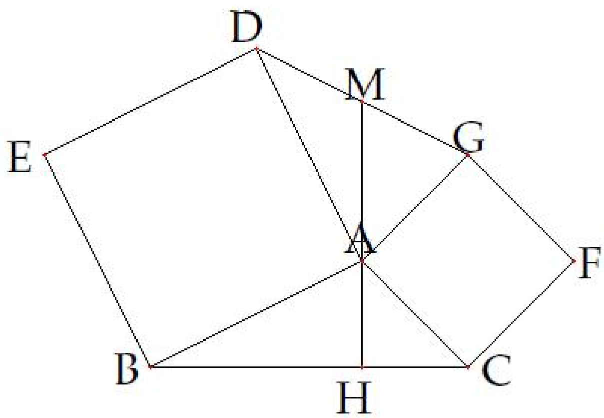
逆にみて

b を a を中心にして c を
時計回りに $90°$ 回転したものとみたとき

$$b - a = -i(c - a)$$

である。

例題をやってみよう。

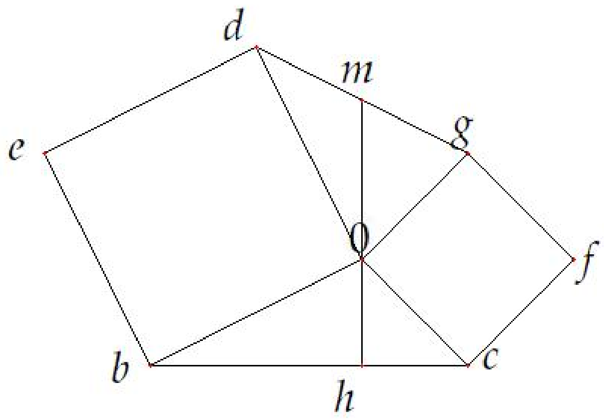


例題

図において、四辺形 ADEB, ACFG は正方形

M は GD の中点とするとき

BC = 2 MA で AM と BC は直交している。このことを示せ。



複素平面を使った証明

A が 0 となるように座標を入れて複素平面で考える。

B ~ G と M に対応する複素数を各々 $b \sim g$ と m とおく。

0 の回りに b を時計回りに 90° 回転したのが d

0 の回りに c を反時計回りに 90° 回転したのが g

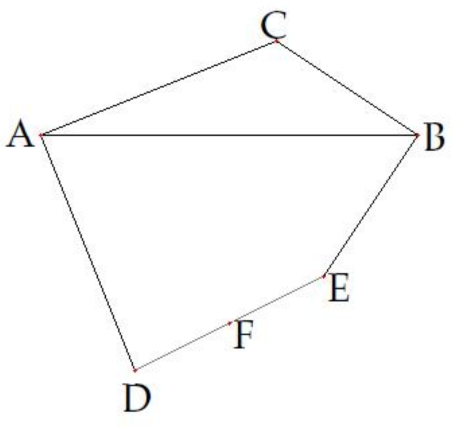
なので

$$d = -ib \text{ で } g = ic$$

m は d と g の中点なので

$$m = \frac{d+g}{2} = \frac{-ib+ic}{2} = \frac{1}{2}i(c-b)$$

このことより求める結果を得る。



問題

図において

AD = AC で AD ⊥ AC

BE = BC で BE ⊥ BC

とし

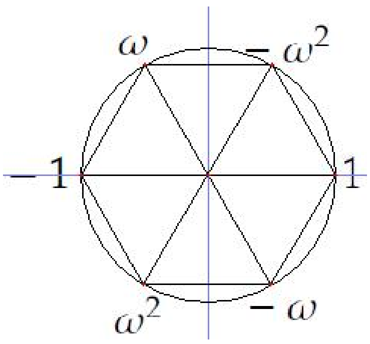
F は DE の中点とする。

このとき F は A と B のみに

より定まり、

C には依存しないことを示せ。

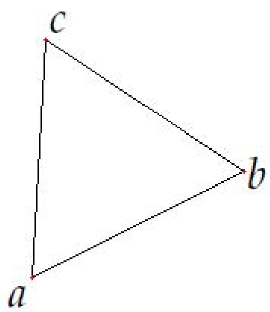
証明の方針　平面幾何でも合同や平行四辺形を利用して比較的簡単に示せるが。ここでは複素数を使った方法で示そう。
AB の中点が 0 となるように座標を入れて、複素平面で考える。
B に対応する数を b とおく。A に対応するすうは $-b$ になる
C, D, E, F に対応する数を各々 c, d, e, f とおくとき
　$f = -ib$ を示す。



60° の複素数
$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
とおくと
$-\omega^2, \omega$ は各々長さが 1 で
偏角が各々 60°, 120° の複素数であり
$-\omega, \omega^2$ は各々長さが 1 で
偏角が各々 −60°, −120° の複素数である。

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
とおくとき $\omega^3 = 1$ であり $\omega \neq 1$ なので、次が成り立つ。
このことは常識として使う。

注意　$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
とおくと
　$\omega^3 = 1$ で $1+\omega+\omega^2 = 0$
が成り立つ。



60° 回転　左の図において
a の回りに b を 反時回りに 60° 回転したものが c とすると
　$c-a = -\omega^2(b-a)$
が成り立っている。

これは、もっときれいな定理の形に記述できる。

定理　複素平面において 3 点 a, b, c が与えられたとき
a, b, c が反時回りに正三角形をなす為の必要十分条件は
　$a+b\omega+c\omega^2 = 0$

である。

証明　a, b, c が反時回りに正三角形をなしているとする。
このとき a は c を b の回りに反時計まわりに $60°$ 回転したものである。
よって

$$a - b = -\omega^2(c - b)$$

計算して

$$a - (1 + \omega^2)b + \omega^2 = 0$$

を得る。

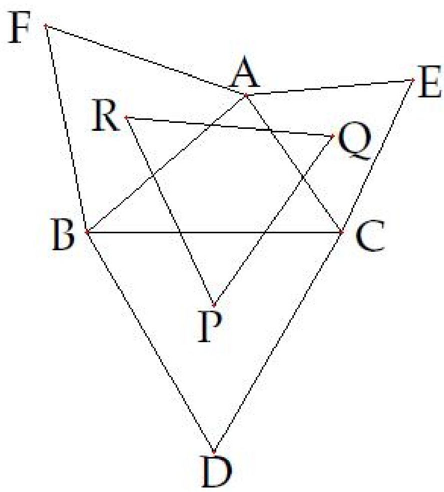
$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

より

$$a + b\omega + c\omega^2 = 0$$

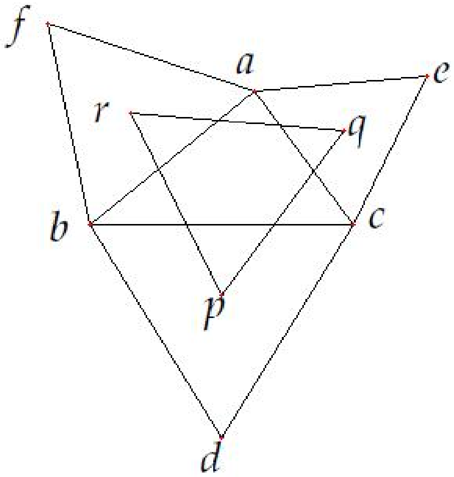
を得る。
逆は前の議論を逆に辿れば示せる。

この定理の応用例として次の例題を与える。



例題
△ ABC の外側に
三つの正三角形
△ BDC, △ CEA, △ AFB
をとり P, Q, R を各々の重心とする。
このとき、
△ PQR が正三角形であることを示せ。

発展題　上の図において次を示せ
三つの三角形 △ ABC, △ DEF, △ PQR の重心が一致することを示せ。



解答　適当に座標を入れて複素平面で考える。
A ~ F, P ~ R に対応する複素数を各々 $a \sim f$, とする。
$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく。
正三角形条件より

$$p + \omega q + \omega^2 r = 0$$

を示すことが目標である。

$$\begin{cases} 3p &= b + d + c, \\ 3\omega q &= \omega c + \omega e + \omega a \\ 3\omega^2 r &= \omega^2 a + \omega^2 f + \omega^2 b \end{cases}$$

に注意しておく。

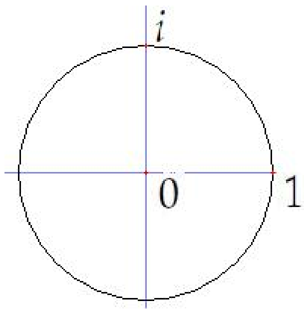
$$\begin{cases} d + \omega c + \omega^2 b &= 0 \\ c + \omega e + \omega^2 a &= 0 \\ b + \omega a + \omega^2 f &= 0 \end{cases}$$

なので求める結果を得る。

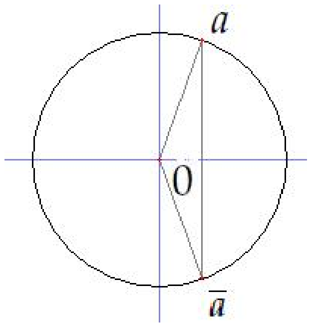
発展題はこの解答から容易に示せるでしょう。

単位円の幾何学

円に関係する図形問題を複素平面で考える時には、当該の円を単位円となるように座標を入れるとうまく行くことが多い。ここでは、そのことを紹介しよう。



定義 (単位円)　複素平面において 0 を中心とし半径 1 の円を単位円という。



注意 (単位円上の点)　a が単位円上の点とするとき、次が成立する。

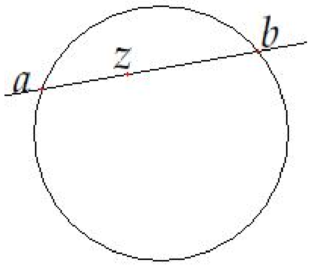
(1)　$|a| = 1$

(2)　$\overline{a}$ も単位円上の点である。

(3)　$a\overline{a} = 1$

(4)　$\overline{a} = \dfrac{1}{a}$

単位円の幾何学が成功する理由はその直線表現の単純さにある。



命題 (直線の方程式)

　a, b が単位円上異なる２点とするとき

複素数 z が a と b を通る直線上にある条件は

　$z + ab\overline{z} = a + b$

である。

この式を a, b の直線方程式ということにする。

証明　一般に a と b を通る直線の方程式は

$$(z-a)\overline{(b-a)} = \overline{(z-a)}(b-a)$$

である。

a, b が単位円上にあるので

$$\overline{a} = \frac{1}{a}, \ \overline{(b-a)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$$

なので、これを上記の式に代入して

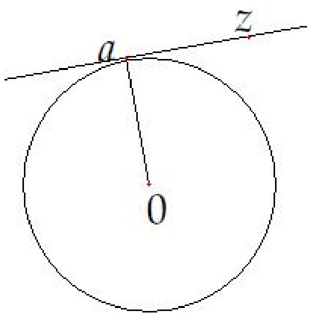
$$(z-a)\frac{a-b}{ab} = (\overline{z} - \frac{1}{a})(b-a)$$

を得る。

　$a - b \neq 0$ なのでこれで割って、ab を掛けて変形して

$$z + ab\overline{z} = a + b$$

を得る。



命題 (接線の方程式)

　a が単位円上の点とするとき
複素数 z が a における接線を通る上にある条件は

$$z + a^2\overline{z} = 2a$$

である。
この式を a における単位円の接線の方程式ということにする。

証明　0 と a を結ぶ直線と a と z を通る特選が直交しているので

$$(z-a)\overline{a} = \overline{(z-a)}a$$

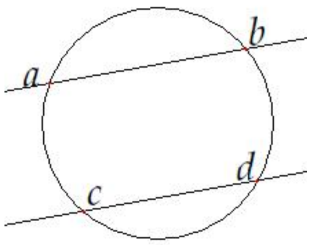
である。
a が単位円上の点なので $a\overline{a} = 1$ である。
上記に式に a を掛け算して、変形して、求める式

$$z + a^2\overline{z} = 2a$$

を得る。

接線の方程式は見掛け上、直線の方程式の $a = b$ の場合に成っている。

次に単位円の二つの弦の平行条件と直交条件について言及しておく。



命題 (平行な弦)

　a, b, c, d を単位円上の点とし
$a \neq b$、 $c \neq d$ とする。このとき
　a と b が通る弦と c と d を通る弦が
平行である条件は

$$ab = cd$$

である。

証明　　a と b が通る弦と c と d を通る弦が平行である条件は

$$\frac{a-b}{c-d}$$

が実数であること
即ち

$$(a-b)\overline{(c-d)} = \overline{(a-b)}(c-d)$$

である。
a, b, c, d を単位円上の点なので

$$\overline{c-d} = \frac{d-c}{cd}, \overline{a-b} = \frac{b-a}{ab}$$

である。これを、上記の式に代入して

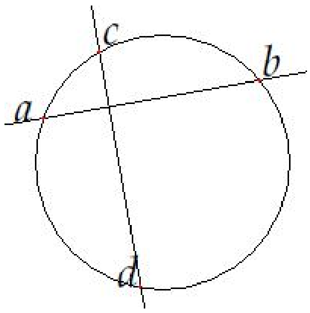
$$(a-b)\frac{d-c}{cd} = \frac{b-a}{ab}(c-d)$$

を得る。

$a - b \neq 0,\ c - d \neq 0$ なので、求める式

$ab = cd$

でを得る。



命題 (直交する弦)

a, b, c, d を単位円上の点とし

$a \neq b$、 $c \neq d$ とする。このとき

a と b が通る弦と c と d を通る弦が

直交する条件は

$ab + cd = 0$

である。

証明 a と b が通る弦と c と d を通る弦が直交する条件は

$$\frac{a-b}{c-d}$$

が純虚数であること

即ち

$$(a-b)\overline{(c-d)} = -\overline{(a-b)}(c-d)$$

である。

a, b, c, d を単位円上の点なので

$$\overline{c-d} = \frac{d-c}{cd},\ \overline{a-b} = \frac{b-a}{ab}$$

である。これを、上記の式に代入して

$$(a-b)\frac{d-c}{cd} = -\frac{b-a}{ab}(c-d)$$

を得る。

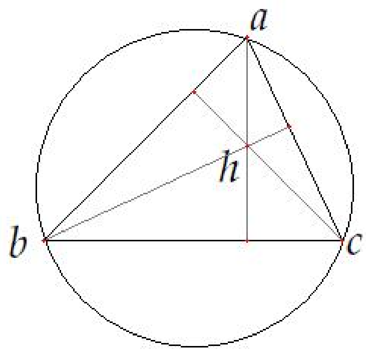
$a - b \neq 0,\ c - d \neq 0$ なので、求める式

$ab + cd = 0$

でを得る。

単位円の幾何学の適用例を幾つか紹介しよう。

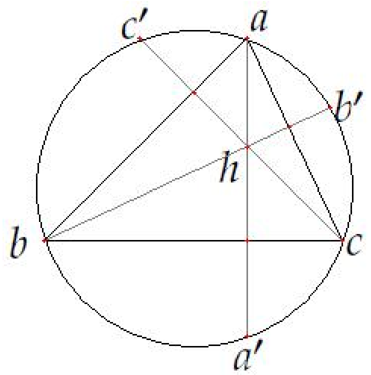
まず、三角形の垂心から始めよう。



定理 (単位円に内接する三角形の垂心)
単位円上に異なる３点 a, b, c が与えられたとき
その３点のなす三角形の垂心は

$$a + b + c$$

で与えられる。



証明
a から b と c を結ぶ直線に引いた垂線が単位円と再び交わる点を a' とおき
b から c と a を結ぶ直線に引いた垂線が単位円と再び交わる点を b' とおく。
a と a' とを結ぶ直線と
b と b' とを結ぶ直線との交点を h とする。

直交条件及び直線条件より

$$\begin{cases} aa' + bc &= 0 \\ bb' + ca &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h + aa'\overline{h} &= a + a' \\ h + bb'\overline{h} &= b + b' \end{cases}$$

が成り立っている。
$aaa' = -abc = bbb'$ より

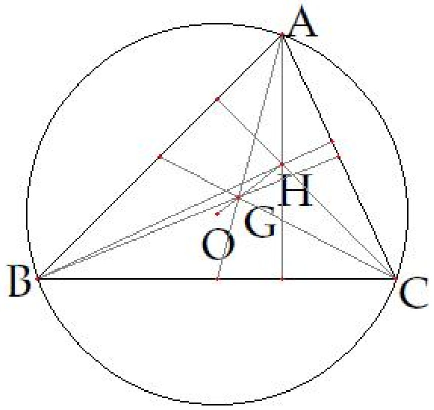
$$(a - b)h = a(a + a') - b(b + b') = (a^2 - bc) - (b^2 - ca) = (a - b)(a + +c)$$

$a - b \neq 0$ より $h = a + b + c$ を得る。

上の定理と同じ記号のもと
a と b と c とで作る三角形の重心は $\dfrac{a + b + c}{3}$ で与えられるので、これを g とおくと

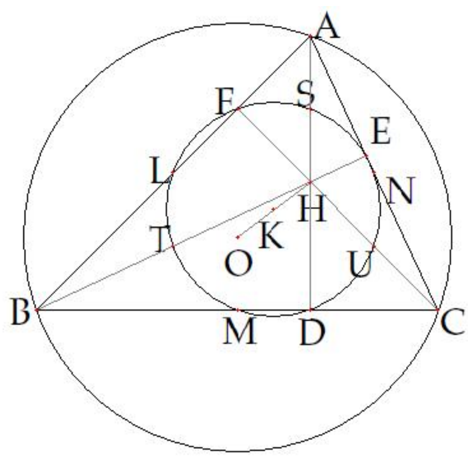
$$h = 3g$$

である、つまり g は 0 と h を 1 : 2 に内分する点である。
これを平面幾何の定理で述べると次になる。



定理
$\triangle$ ABC において、その外心、垂心、重心を各々 O, H, G, とするとき G は OH を 1 : 2 内分する点である。

垂心の話の発展として、有名な９点円の定理がある。



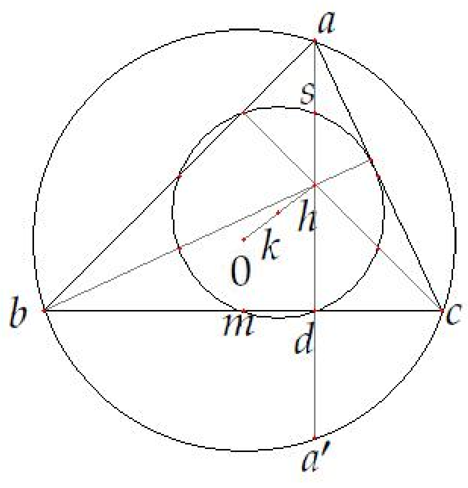
定理 (９点円の定理)
$\triangle$ ABC において、各頂点 A, B, C から対辺 BC, CA, AB に各々引いた垂線の足を各々 D, E, F とする。辺 BC, CA, AB の中点を各々 M, N, L とする。H を $\triangle$ ABC 垂心として AH, BH, CH 各々の中点を各々 S, T, U する。このとき９点 D, E, F, L, M, N, S, T, U は同一円周上にある。
この円を $\triangle$ ABC の９点円という。

この円は、O を $\triangle$ ABC 外心として K を OH の中点とするとき、
K を中心とし半径が $\triangle$ ABC の外接円の半径の $\dfrac{1}{2}$ の円である。

証明　図形の対称性より、

$$\mathrm{KM} = \mathrm{KD} = \mathrm{KS} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}$$

を示せばよい。　平面幾何での証明もそんなに難しくはないのですが、ここでは、それを複素平面で示そう。



△ABC の外接円が単位円となるように座標を入れて考える。
点 A, B, C, D, M, S に対応する複素数を各々 a, b, c, d, m, s とおく。
a から d 向かって引いた直線と単位円が再び交わる点を d' とおく。
垂線の定理より $h = a + b + c$ 0 である。
また $2k = h$ である。d を通る 2 本の直線の直線条件と直交条件より次の式を得る。

$$\begin{cases} d + aa'\overline{d} &= a + a' \\ d + bc\overline{d} &= b + c \\ aa' + bc &= 0 \end{cases}$$

これらより

$$2d = a + b + c + a' = h + a'$$

を得る。よって

$$2|d - k| = |2d - 2k| = |a'| = 1$$

また

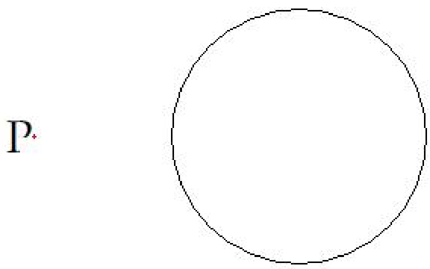
$$2m = b + c = h - a, \ 2s = h + a$$

なので求める結果

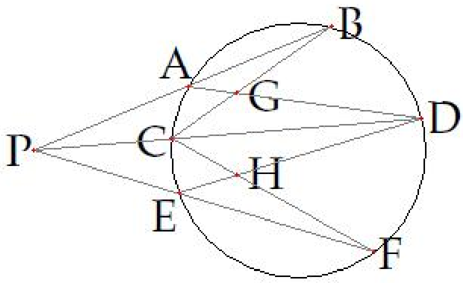
$$|d - k| = |m - k| = |s - k| = \frac{1}{2}$$

を得る。

単位円の幾何学のもう一つの応用として次を紹介しよう。

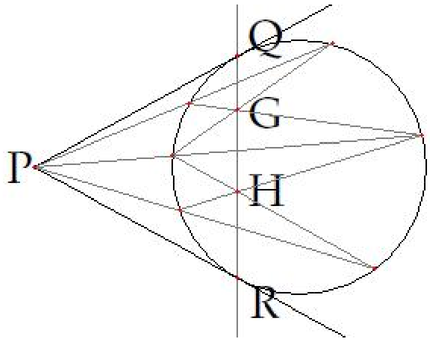


問題　定円とその外側の定点 P が与えられている。
このとき
定規のみを使って
P から定円に接線を引きなさい。



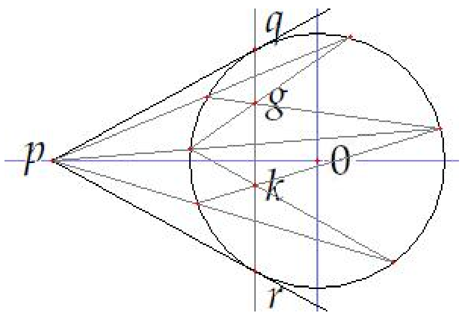
解答

　Pから円に3本の直線を引き円の3つの弦 AB, CD, EF の延長がPを通るように引く。
AD と BC との交点を G とし
CF と DE との交点を H とする。



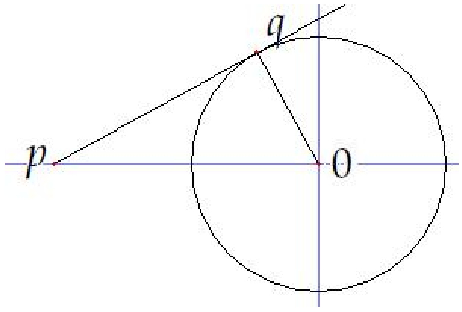
G と H を通る直線と円との2つの交点を Q と R とする。
直線 PQ と PR がもとめる接線である。

解説　Q を上記のように取ったとき PQ が P から定円に引いた接線であることを示す代わりに
P から円に引いた接線の接点を Q, R とおいたとき
Q, R, G, K が一直緯線上にあることを示せば良い。



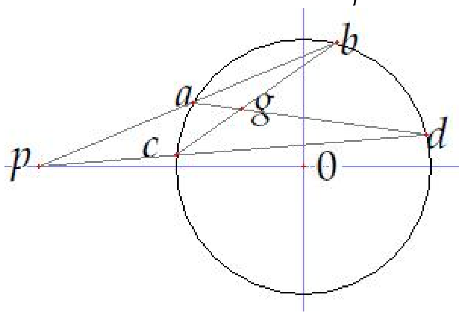
定円が単位円となり P が実数軸上にあるように座標を入れて複素平面で考える。
P, Q, R, G, K に対応する複素数を各々 p, q, r, g, k とおく。
$q,\ r,\ g,\ k$ の実数部分がすべて等しいことを示せば
$q,\ r,\ g,\ k$ が一直線上にあることが分かる。

$q,\ r,\ g,\ k$ の実数部分がすべて等しいことを示すには
$$q+\overline{q} = r+\overline{r} = g+\overline{g} = k+\overline{k}$$
を示せばよい。
p が実数であることから $\overline{p} = p$ として、これから計算していく。



q における単位円の接線が p を通るので
接線方程式より
$(1+q^2)p = 2q$
を得る。($\overline{p} = p$ を使った)
よって
$$\frac{2}{p} = \frac{1+q^2}{q} = q + \frac{1}{q} = q + \overline{q}$$
を得る。

(q が単位円上にあるので $\overline{q} = \dfrac{1}{q}$ である。これを使った)



次に g について考察する。
p を通る２本の直線、
g を通る２本の直線の方程式より
$$\begin{cases} (1+ab)p &= a+b \\ (1+cd)p &= c+d \\ g + ad\overline{g} &= a+d \\ g + bc\overline{g} &= b+c \end{cases}$$
が成り立つ。

よって
$$\begin{cases} (ad-bc)g = ad(b+c) - bc(a+d) &= dab + acd - cab - bcd \\ (ad-bc)\overline{g} &= a+d-b-c \end{cases}$$
を得る。これより
$$\begin{aligned} p(ad-bc)(g+\overline{g}) &= dp(1+ab) + ap(1+cd) - cp(1+ab) - bp(1+cd) \\ &= d(a+b) + a(c+d) - c(a+b) - b(c+d) \\ &= 2(ad-bc) \end{aligned}$$
を得る。
a と d を結ぶ直線と b と c を結ぶ直線とが平行でないので
$$ad - bc \neq 0$$
よって $g + \overline{g} = \dfrac{2}{p}$ を得る。
以上より
$q + \overline{q} = g + \overline{g} = \dfrac{2}{p}$ を得る。
同様に
$r + \overline{r} = k + \overline{k} = \dfrac{2}{p}$ を得る。