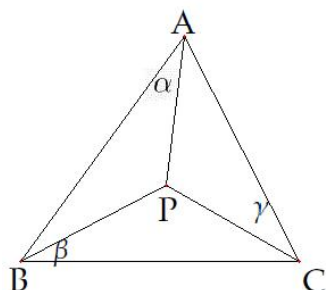


## 1 導入



**問題 1.1** 次を示せ。

$P$  は  $\triangle ABC$  の内部の点とする。

このとき

$\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$  のうち

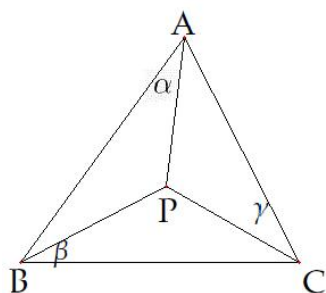
少なくとも一つは  $30^\circ$  以下である。

この問題 1.1 を考察することにしよう。

$\alpha = \angle PAB, \beta = \angle PBC, \gamma = \angle PCA$ ,  
と表わすことにする。

この問題 1.1 は次の問題たちと同値な問題 (同等な問題) である。

問題 1.1 と同じ記号をしばらくは使うことにする。

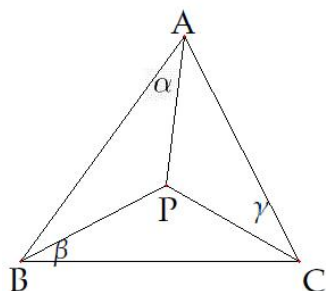


**問題 1.2** 次を示せ。

$\alpha, \beta, \gamma$  のうち

二つが  $30^\circ$  より大きいとすると

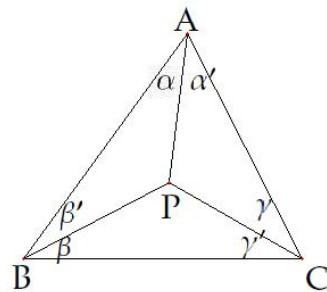
残りは  $30^\circ$  以下である。



**問題 1.3**  $\alpha, \beta, \gamma$  の全てが  
 $30^\circ$  より大きいとすると  
矛盾が生じる

問題 1.1、問題 1.2、問題 1.3 何れも、このままではなかなか難しくて手が

りがつかめない。  
次の図はやはり考えないといけないでしょう。



さらに

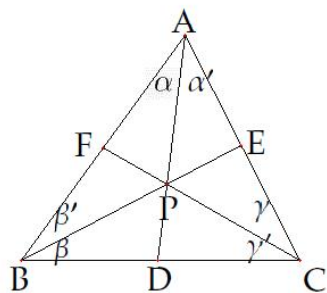
$$\alpha' = \angle PAC, \beta' = \angle PBA, \gamma' = \angle PCB$$

とおく

始めの図だけではバランスが悪い、この方が調和が保てるでしょう。

以後、この記号のもと考えていくことにしましょう。

これに、少し近い状況では良く知られたチェバの定理があります。



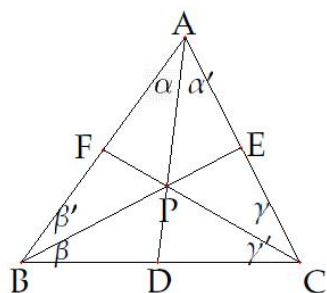
#### 定理 1.1 (チェバの定理)

$D, E, F$  を各々  
 $BC, CA, AB$  上の点とする。このとき  
 $AD, BE, CF$  が一点で交わるための  
必要十分条件は

$$BD \times CE \times AF = DC \times EA \times FB$$

である。

定理 1.1 の系として、それほどは知られていませんが、チェバの定理の角度版があります。



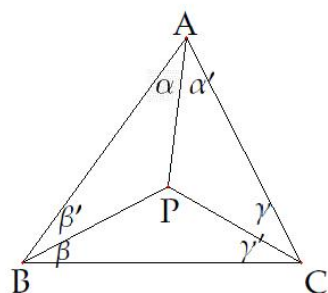
#### 定理 1.2 (チェバの定理の角度版)

$D, E, F$  を各々  
 $BC, CA, AB$  上の点とする。このとき  
 $AD, BE, CF$  が一点で交わるための  
必要十分条件は

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma = \sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma'$$

である。

この定理 1.2 の証明は、付録で行うことにするが、これを、もとの問題に当てはめると、次を得る。補題の形で述べておこう。



**補題 1.3** 次が成り立つ。  
 $\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma = \sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma'$   
 である。

これは、前に述べたようにチェバの定理の角度版の直接の結果であるが、この証明は直接簡単に行うことができる。直接の証明は次節で与える。

もとの、問題を解く時の手がかりとして

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma = \sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma'$$

が得られた。

問題 1.3 を解こうと考えてみよう。

$\alpha, \beta, \gamma$  の全てが  $30^\circ$  より大きいとする。

このとき

$$\sin \alpha > \frac{1}{2}, \sin \beta > \frac{1}{2}, \sin \gamma > \frac{1}{2}$$

なので

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma > \frac{1}{8}$$

これより

$$\sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma' > \frac{1}{8}$$

を得る。

$$\alpha + \beta + \gamma > 90^\circ$$

より

$$\alpha' + \beta' + \gamma' < 90^\circ$$

なので、ひょっとしてこれから矛盾がででくるかも知れない。

次の問題が解ければ、問題 1.3 が解けたことになる。

**問題 1.4** 次を示せ。

$$0 < a, 0 < b, 0 < c \text{ で } a + b + c < \frac{\pi}{2}$$

のとき

$$\sin a \times \sin b \times \sin c < \frac{1}{8}$$

である。

次が、成り立つと思うのは虫がよすぎるのかな？

予想の形で述べておこう。

**予想 1**  $0 < a, 0 < b, 0 < c$  で  $a + b + c < \pi$

のとき

$$d = \frac{a+b+c}{3} \text{ とおくと}$$
$$\sin a \times \sin b \times \sin c \leq (\sin d)^3$$

である。

等号は  $a = b = c = d$  のとき、その時のみ成立する。

この予想はまんざら間違いではなさそうである。実際次が成り立っている。

**命題 1.4**  $0 < a, 0 < b$  で  $a + b < \pi$

のとき

$$d = \frac{a+b}{2} \text{ とおくと}$$
$$\sin a \times \sin b \leq (\sin d)^2$$

である。

**証明**  $2 \sin a \times \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b) \leq 1 - \cos 2d = 2(\sin d)^2$

実際、次節では補題として設定し、証明を与えるが、その予想は正しい。

$$\delta' = \frac{\alpha' + \beta' + \gamma'}{3}$$

とおくと

$$\alpha' + \beta' + \gamma' < \frac{\pi}{2} \text{ より } \delta' < \frac{\pi}{6} \text{ であり } \sin \delta' < \frac{1}{2} \text{ となる。}$$

よって、予想が証明された時点では

$$\sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma' \leq (\sin \delta')^3 < \frac{1}{8}$$

となり、問題 1.3 が証明されることになる。

今までの議論を踏まえて、一般の状況に戻ろう。

$$\alpha + \beta + \gamma \leq \frac{\pi}{2}$$

または

$$\alpha' + \beta' + \gamma' \leq \frac{\pi}{2}$$

が成り立つので

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma \leq \frac{1}{8}$$

または

$$\sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma' \leq \frac{1}{8}$$

が成り立つ。

ところが

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma = \sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma'$$

なので

いつでも

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma \leq \frac{1}{8}$$

が成り立つことになる。

もし、

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma = \frac{1}{8}$$

だとすると

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

かつ

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \frac{\pi}{2}$$

であり

さらに

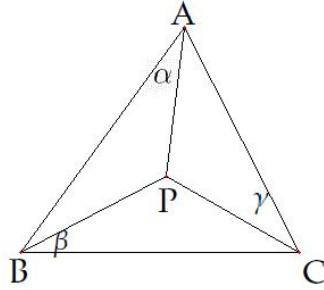
$$\alpha = \beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{\pi}{6}$$

をえることになる。

このときは  $\triangle ABC$  は正三角形で  $P$  はその中心となる。

次節ではこの節の議論を踏まえ再構築して、証明も与えよう。

## 2 本節



**定理 2.1**  $P$  は  $\triangle ABC$  の内部の点とする。

$$\alpha = \angle PAB, \beta = \angle PBC, \gamma = \angle PCA$$

とおくと

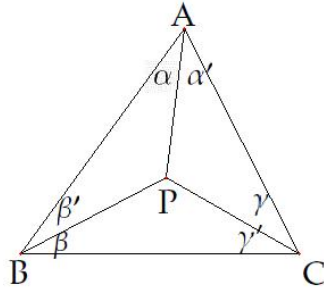
$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma \leq \frac{1}{8}$$

が成り立つ。

等号は  $\triangle ABC$  が正三角形で

$P$  がその中心のときのみ成立する。

この定理の証明のために幾つかの補題を用意する。(前節のものも再度記述する)



**補題 2.2**  $P$  は  $\triangle ABC$  の内部の点とする。

$$\alpha = \angle PAB, \beta = \angle PBC, \gamma = \angle PCA,$$

$$\alpha' = \angle PAC, \beta' = \angle PBA, \gamma' = \angle PCB$$

とおくと

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma = \sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma'$$

である。

**補題 2.3**  $a, b, c$  を  $a + b + c \leq \pi$  なる正の数として

$$d = \frac{a + b + c}{3} \text{ とする。}$$

このとき

$$\sin a \times \sin b \times \sin c \leq (\sin d)^3$$

である。等号は  $a = b = c = d$  のとき、その時のみ成立する。

**補題 2.4**  $n$  を 2 以上の整数とする。

$$0 < a_1, a_2, \dots, a_n \text{ であり } a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \pi$$

とし

$$b = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

とおくとき

$$\sin a_1 \times \sin a_2 \times \dots \times \sin a_n \leq (\sin b)^n$$

が成り立つ。

等号は  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = b$  のとき、その時のみ成り立つ。

**補題 2.5**  $n$  を 2 以上の整数とする

$\alpha, \beta$  は正の数で

$$\alpha + (n-1)\beta \leq \pi$$

とする。

$$\gamma = \frac{\alpha + (n-1)\beta}{n}$$

とおくと

$$\sin \alpha \times (\sin \beta)^{n-1} \leq (\sin \gamma)^n$$

が成り立つ

等号は  $\alpha = \beta = \gamma$  のとき、そのときのみ成り立つ。

**補題 2.6**  $n$  を 2 以上の整数として、 $\gamma$  を  $0 < n\gamma \leq \pi$  なる数とする。

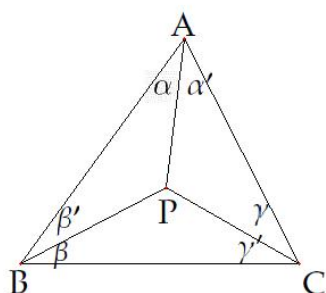
$[0, \frac{n\gamma}{n-1}]$  において関数

$$\sin(n\gamma - (n-1)x) \times (\sin x)^{n-1}$$

が最大値を持つのは  $x = \gamma$  の時であり

最大値は  $(\sin \gamma)^n$  である。

先ず補題 2.2 を証明しよう。



**補題 2.2 の解答**

$\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$  の面積の

2 倍を計算して、次の三つの等式を得る。

$$PA \times AB \times \sin \alpha = PB \times AB \times \sin \beta'$$

$$PB \times BC \times \sin \beta = PC \times BC \times \sin \gamma'$$

$$PC \times CA \times \sin \gamma = PA \times CA \times \sin \alpha'$$

こりより、求める結果を得る。

次に、補題 2.6 を証明する。

**補題 2.6 の解答**

$$f(x) = \sin(n\gamma - (n-1)x) \times (\sin x)^{n-1}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(n-1) \cos(n\gamma - (n-1)x) \times (\sin x)^{n-1} \\ &\quad + (n-1) \sin(n\gamma - (n-1)x) \times (\sin x)^{n-2} \times \cos x \\ &= (n-1) \sin(n(\gamma - x)) \times (\sin x)^{n-2} \end{aligned}$$

なので

$f(x)$  は  $[0, \gamma]$  で狭義単調増加であり

$f(x)$  は  $[\gamma, \frac{n\gamma}{n-1}]$  において狭義単調減少である、

よって、主張は証明された。

**補題 2.5 の解答**

補題 2.6 より明らか。

### 補題 2.4 の解答

$n$  についての帰納法で行う。

$n = 2$  のときは、補題 2.5 の  $n = 2$  の時と同じであり、主張は成立する。

$n \geq 3$  として  $n - 1$  のとき主張が成立していると仮定する。

$$\gamma = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n-1}$$

とおく

このとき、帰納法の仮定より

$$\sin \alpha_1 \times \sin \alpha_2 \times \cdots \times \sin \alpha_{n-1} \leq (\sin \gamma)^{n-1}$$

が成り立つ

これの等号が成り立つのは  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = \gamma$  のときのみである。

$0 < \alpha_n, \gamma$ , であり  $\alpha_n + (n-1)\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leq \pi$  かつ

$$\frac{\alpha + (n-1)\gamma}{n} = \beta$$

なので

$$\sin \alpha_n \times (\sin \gamma)^{n-1} \leq (\sin \beta)^n$$

が成り立つ。

等号は  $\alpha_n = \gamma = \beta$  の時のみ成立する。

よって

$$\sin \alpha_1 \times \sin \alpha_2 \times \cdots \times \sin \alpha_{n-1} \times \sin \alpha_n \leq \sin \alpha_n \times (\sin \gamma)^{n-1} \leq (\sin \beta)^n$$

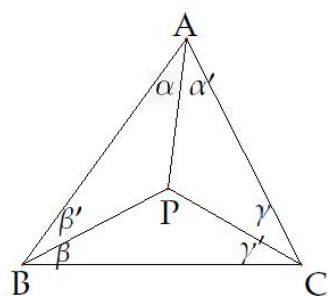
より

$$\sin \alpha_1 \times \sin \alpha_2 \times \cdots \times \sin \alpha_n \leq (\sin \beta)^n$$

が成り立つ

等号は  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \beta$  のときのみ成り立つ。

補題 2.3 の解答 これは、補題 2.4 の  $n = 3$  のときである。



### 定理 2.1 の証明

$$\alpha' = \angle PAC, \beta' = \angle PBA, \gamma' = \angle PCB$$

とおく。

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$$

より

$$\alpha + \beta + \gamma \leq \frac{\pi}{2}$$

または

$$\alpha' + \beta' + \gamma' \leq \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。

$$\alpha + \beta + \gamma \leq \frac{\pi}{2}$$

のときは、補題 2.3 より

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma \leq \frac{1}{8}$$

を得る。

等号が成り立つのは  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$  の時である。

そのときは  $\alpha' + \beta' + \gamma' = \frac{\pi}{2}$  であることに注意しておく。

次に

$$\alpha' + \beta' + \gamma' \leq \frac{\pi}{2}$$

の場合を考えよう。

同様にして

$$\sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma' \leq \frac{1}{8}$$

を得る。

補題 2.2 より、このときも

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma \leq \frac{1}{8}$$

を得る。

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma = \frac{1}{8}$$

のときは

$$\sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma' = \frac{1}{8}$$

なので、

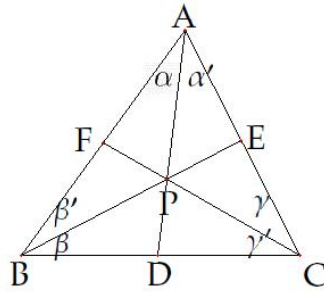
$$\alpha = \beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{\pi}{6}$$

を得る。つまり  $\triangle ABC$  が正三角形で  $P$  がその中心であることが分かる。

### 3 付録

この節ではチェバの定理の角度版の証明と補題 2.4 の凸関数による別証明を与えておこう。

最初にチェバの定理の角度版の証明を与えよう。



**定理 3.1 (チェバの定理の角度版)**

$D, E, F$  を各々  $BC, CA, AB$  上の点とする。このとき

$AD, BE, CF$  が一点で交わるための必要十分条件は

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma = \sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma'$$

である。

**証明** チェバの定理より

$AD, BE, CF$  が一点で交わるための必要十分条件は

$$BD \times CE \times AF = DC \times EA \times FB$$

である。

$\triangle ABD$  と  $\triangle ADC$  の面積比より

$$\begin{aligned} BD : DC &= 2 AB \times AD \times \sin \alpha : 2 AC \times AD \times \sin \alpha' \\ &= AB \times \sin \alpha : AC \times \sin \alpha' \end{aligned}$$

を得る。

同様にして

$$\begin{aligned} CE : EA &= BC \times \sin \beta : BA \times \sin \beta' \\ AF : FB &= CA \times \sin \gamma : CB \times \sin \gamma' \end{aligned}$$

を得る。

これより

$$BD \times CE \times AF = DC \times EA \times FB$$

が成り立つことと

$$\sin \alpha \times \sin \beta \times \sin \gamma = \sin \alpha' \times \sin \beta' \times \sin \gamma'$$

が成り立つことは同値である。

よって定理は証明された。

次に凸関数を使った不等式の一般論を紹介し、それを補題 2.4 に適用しよう。

### 定理 3.2 (凸関数と平均)

関数  $f(x)$  が区間  $I$  で 2 階まで微分可能でそこでは  $f''(x) < 0$  が成り立っているとする。

$n$  を 2 以上の整数とし、

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

を  $I$  に属する  $n$  個の数とする。

$$c = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

このとき

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq nf(c)$$

が成り立つ。

等号は  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = c$  の時、その時のみ成り立つ。

この証明のために、次の補題を用意する。

**補題 3.3**  $n$  を 2 以上の整数とし、 $a, b$  を  $I$  に属する数とし

$$c = \frac{a + (n-1)b}{n} \text{ とする。}$$

このとき

$$f(a) + (n-1)f(b) \leq nf(c)$$

が成り立つ。

等号は  $a = b = c$  の時、その時のみ成り立つ。

### 補題 3.3 の証明

$J$  を関数  $g(x) = f(nc - (n-1)x) + (n-1)f(x)$  の定義可能な  $I$  の部分区間とする。

$$g'(x) = (n-1)\{-f'(nc - (n-1)x) + f'(x)\}$$

$I$  において  $f''(x) < 0$  なので  $f'(x)$  は  $I$  で狭義単調減少なので、 $J$  において  $g'(x)$  は狭義単調減少である。

$g'(c) = 0$  なので  $g(x)$  は  $x = c$  のところでのみ最大値をもつ。

よって

$$g(x) \leq g(c) = nf(c)$$

であり、等号は  $x = c$  の時のみ成立する。

これより

$$f(a) + (n-1)f(b) \leq nf(c)$$

であり、等号は  $a = b = c$  の時のみ成立する。

### 定理 3.2 の証明

$n$  についての帰納法で行う。

$n = 2$  のときは補題 3.3 の  $n = 2$  のときより成り立つ。

$n \geq 3$  として  $n-1$  までは成り立つとする。

$$b = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$$

とおくと、帰納法の仮定より

$$f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_n) \leq (n-1)f(b)$$

が成り立つ。

等号は  $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = b$  の時、その時のみ成り立つ。

$$\frac{a_1 + (n-1)b}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = c$$

なので、補題 3.3 より

$$f(a_1) + (n-1)f(b) \leq nf(c)$$

であり、等号は  $a_1 = b = c$  の時のみ成立する。

よって

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \leq f(a_1) + (n-1)f(b) \leq nf(c)$$

であり、二つの等号は  $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = c$  の時、その時のみ成り立つ。

定理 3.2 の系というか相棒というか次の定理が成り立つ。

#### 定理 3.4 (凹関数と平均)

関数  $f(x)$  が区間  $I$  で 2 階まで微分可能でそこでは  $f''(x) > 0$  が成り立っているとする。

$n$  を 2 以上の整数とし、

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

を  $I$  に属する  $n$  個の数とする。

$$c = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

このとき

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \geq nf(c)$$

が成り立つ。

等号は  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c$  の時、その時のみ成り立つ。

定理 3.2 の応用として、補題 2.4 を例題の形として示そう。

#### 例題 3.1 次を示せ。

$n$  を 2 以上の整数とする。

$$0 < a_1, a_2, \cdots, a_n < \pi \quad \text{とし} \quad b = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

とするとき

$$\sin a_1 \times \sin a_2 \times \cdots \times \sin a_n \leq (\sin b)^n$$

が成り立つ。

等号は  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b$  のとき、そのときのみ成り立つ。

**解答** 开区間  $(0, \pi)$  での関数  $f(x) = \log \sin x$  を考える。

このとき

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(\sin x)^2} < 0$$

なので

$$\log \sin a_1 + \log \sin a_2 + \cdots + \log \sin a_n \leq n \log \sin b$$

が成り立つ。

等号は  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b$  のとき、そのときのみ成り立つ。

これより、求める結果を得る。

次の例題は定理 3.4 を使って示される。

**例題 3.2**  $m, n$  を 2 以上の整数として

$$0 < a_1, a_2, \cdots, a_n \text{ とし } b = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

とするとき

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq b^m$$

が成り立つ。

等号は  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b$  のとき、そのときのみ成り立つ。

**解答**  $(0, \infty)$  での関数  $x^m$  に対して定理 3.4 を適用すれば良い。