定理１
n を自然数とする。
$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を n 個の正の数とするとき
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$
であり
等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときのみ成り立つ。

これは相加相乗平均値の定理と呼ばれる定理である。これは次の定理２と同値である。

定理２ n を自然数とする。
$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を n 個の正の数とするとき
$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geq n a_1 a_2 \cdots a_n$$
であり
等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のときのみ成り立つ。

定理２において、$n = 1$ のときは自明であり、$n = 2$ のときは簡単に示される。２００８年８月１８日の朝日新聞において、高校教諭の内田康晴さんが易しい証明法を見つけたということが報道されました。ここでは内田さんのアイデアによる証明を紹介します。
定理２の証明において $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$
と仮定して証明してもよいことに注目しておきます。
定理２は次の定理３が示されれば、数学的帰納法により示されます。

定理３ n を自然数とする。
$a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ を
$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq b$
なる $n+1$ 個の正の数とするとき
$$a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_n^{n+1} + b^{n+1} \geq (a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n)b + a_1 a_2 \cdots a_n b$$
であり
等号は $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b$ のときのみ成り立つ。

定理３を証明するのに使うのは次の補題である。

補題　x, y, z, w を $x \geq z,\ y \geq w$ なる実数とするとき
$$xy + zw \geq xw + yz$$
が成り立つ。等号は $x = z$ または $y = w$ のときのみ成立する。

補題の証明　$(x-z)(y-w) \geq 0$ より明らか。

定理３の証明

k を $0 \leq k \leq n$ なる整数とするとき

$c_k = a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_n b^k$

とおき

$b_k = c_k b$

とおく。次に注意しておきましょう。

$b_n = b^{n+1}, b_0 = a_1a_2\cdots a_n b$

さらに

$a_k^n \geq c_k$ であり、等号は $a_k = b$ のときのみ成立する。

$k > 0$ のとき $b_{k-1} = a_k c_k$

に注意しておきましょう。

$1 \leq k \leq n$ のとき

$a_k^{n+1} = a_k^n a_k,\ b_k = c_k b,\ a_k^n \geq c_k,\ a_k \geq b$

なので、補題より

$a_k^{n+1} + b_k = a_k^n a_k + c_k b \geq a_k^n b + a_k c_k = a_k^n b + b_{k-1}$

(等号は $a_k = b$ のときのみ成立する)

従って次を得る。

$$
\begin{aligned}
&a_n^{n+1} + b_n \geq a_n^n b + b_{n-1} \\
&a_{n-1}^{n+1} + b_{n-1} \geq a_{n-1}^n b + b_{n-2} \\
&a_{n-2}^{n+1} + b_{n-2} \geq a_{n-2}^n b + b_{n-3} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&a_3^{n+1} + b_3 \geq a_3^n b + b_2 \\
&a_2^{n+1} + b_2 \geq a_2^n b + b_1 \\
&a_1^{n+1} + b_1 \geq a_1^n b + b_0
\end{aligned}
$$

これらの式と、$b_n = b^{n+1}, b_0 = a_1a_2\cdots a_n b$　より

求める結果を得る。