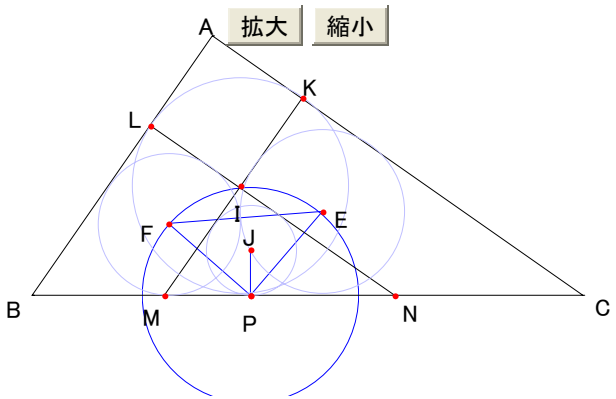
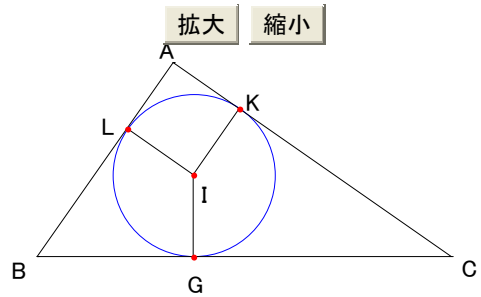
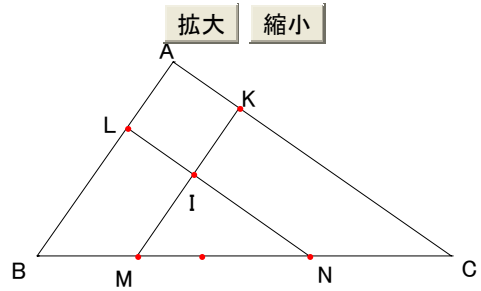


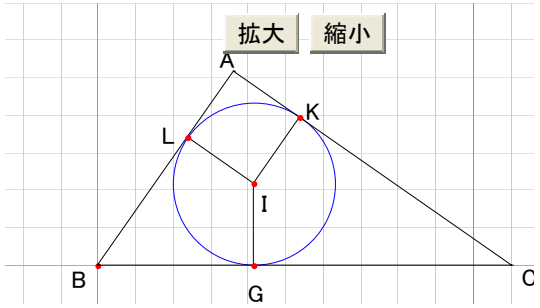
図において
⊿ABC は ∠BAC = 90° の直角三角形
I は ⊿ABC の内心
L は AB 上の点、M, N は BC 上の点
K は AC 上の点であり
KM は AB と平行
LN は AC と平行とする
E は ⊿KMC の内心,
F は ⊿LBN の内心,
J は ⊿IMN の内心として
P は J から BC におろした垂線の足とする
このとき
① E, F, I は P を中心とする
同一円周上にある。
② ∠FPE = 90°



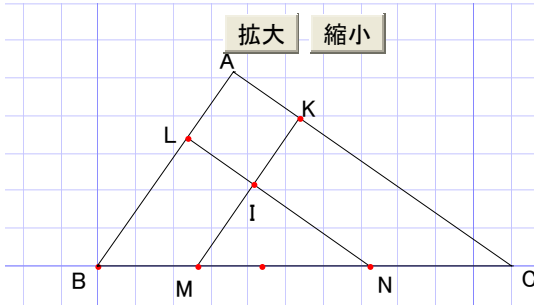
I から BC に下ろした
垂線の足を G とおくと
AL = AK = IL = IK = IG
BL = BG, CK = CG である。



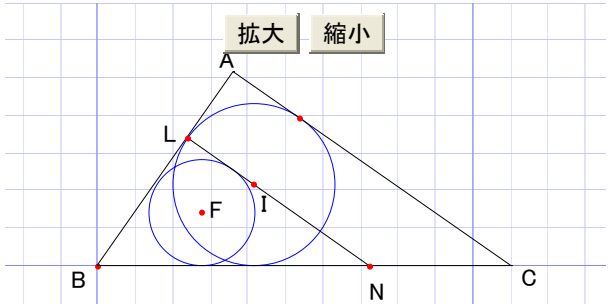
⊿ABC ≡ ⊿LBN
≡ ⊿KMC ≡ ⊿IMN



B を原点 C が X 軸上にあるよう
座標をいれる
$\alpha = BG$, $\beta = GC$, $\gamma = AL$ とおくと
$I(\alpha, \gamma)$
$(\alpha+\gamma)^2 + (\beta+\gamma)^2 = (\alpha+\beta)^2$ より
$(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma) = 2\alpha\beta$

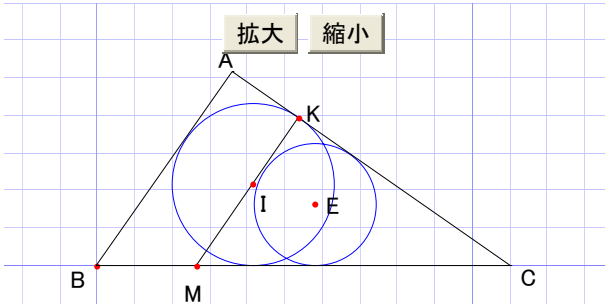


BM : MC = AK : KC = $\gamma : \beta$ より
$M((\alpha+\beta)\gamma/(\beta+\gamma), 0)$
同様にして
BN : NC = BL : LA = $\alpha : \gamma$ より
$N((\alpha+\beta)\alpha;/(\alpha+\gamma), 0)$



BN : BC = $\alpha : \alpha+\gamma$, I(α, γ) より

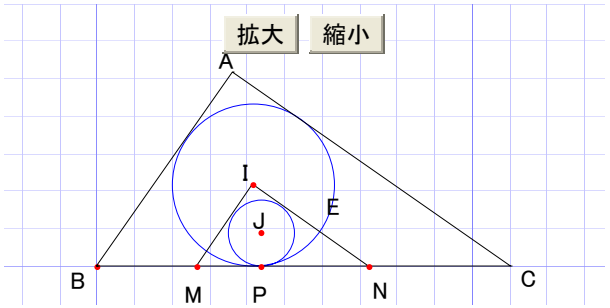
F = ($\alpha^2/(\alpha+\gamma)$, $\alpha\gamma/(\alpha+\gamma)$)



BC : MC = $\beta+\gamma : \beta$, M($(\alpha+\beta)\gamma/(\beta+\gamma)$, 0),

I(α, γ) より

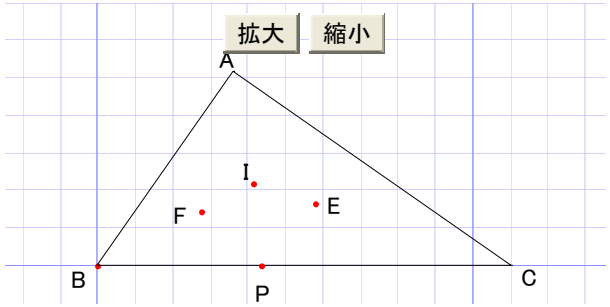
E = ($(\alpha+\beta)\gamma/(\beta+\gamma) + \alpha\beta/(\beta+\gamma)$, $\beta\gamma/(\beta+\gamma)$)



BC : MN = 1 : $\alpha/(\alpha+\gamma) - \gamma/(\beta+\gamma)$,

M($(\alpha+\beta)\gamma/(\beta+\gamma)$, 0), I($\alpha$, γ) より

P($(\alpha+\beta)\gamma/(\beta+\gamma) + \alpha^2/(\alpha+\gamma) - \gamma\alpha/(\beta+\gamma)$, 0)



I(α, γ)

F = ($\alpha^2/(\alpha+\gamma)$, $\alpha\gamma/(\alpha+\gamma)$)

E = ($\alpha + \beta\gamma/(\beta+\gamma)$, $\beta\gamma/(\beta+\gamma)$)

P($\beta\gamma/(\beta+\gamma)+\alpha^2/(\alpha+\gamma)$, 0)

vec(IP) = ($\alpha\gamma/(\alpha+\gamma)-\beta\gamma/(\beta+\gamma)$, γ)

vec(FP) = ($-\beta\gamma/(\beta+\gamma)$, $\alpha\gamma/(\alpha+\gamma)$)

vec(EP) = ($\alpha\gamma/(\alpha+\gamma)$, $\beta\gamma/(\beta+\gamma)$)

これと

$(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma) = 2\alpha\beta$

より IP = FP = EP.

FP と EP が直交していることがわかる