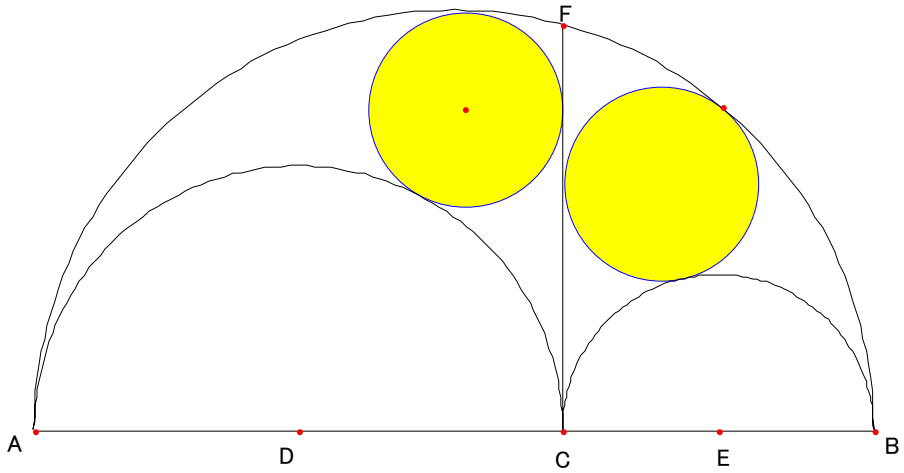
拡大 縮小

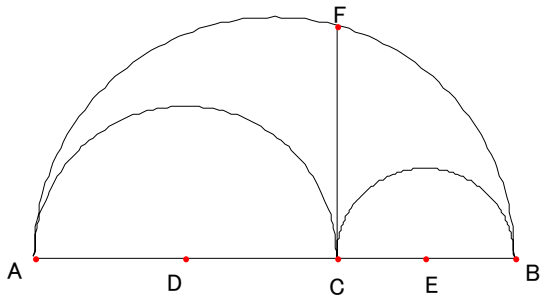


作図

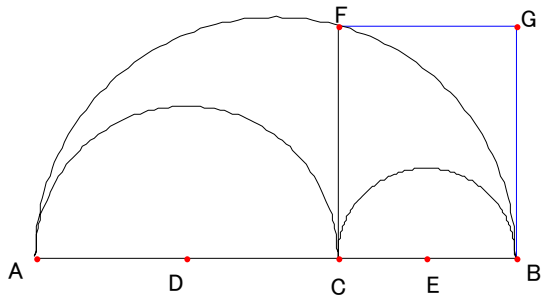
C は線分 AB 上の点ととする
AB, AC, CB 直径とする三つの半円がある
F は大きい半円上の点で
CF と AB と直交しているものとする。
図のような
二つの半円に接し CF に接する円を作図しよう

Go Geometryにあった図です

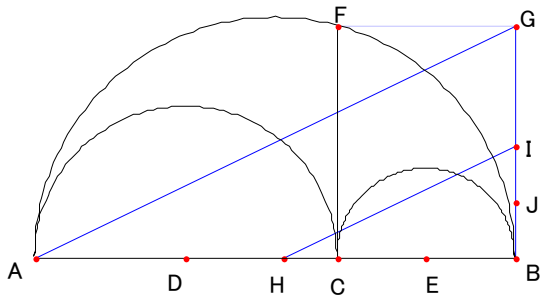
拡大 縮小



拡大 縮小



拡大 縮小



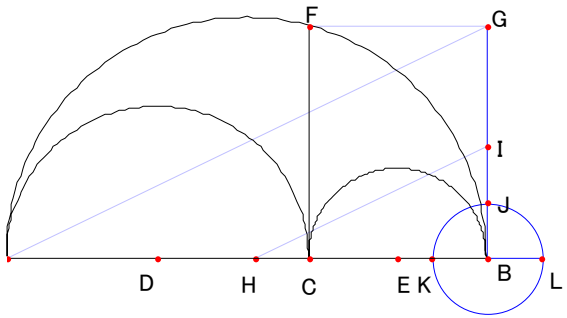
作図

これから始まります

長方形 FCBG を描く

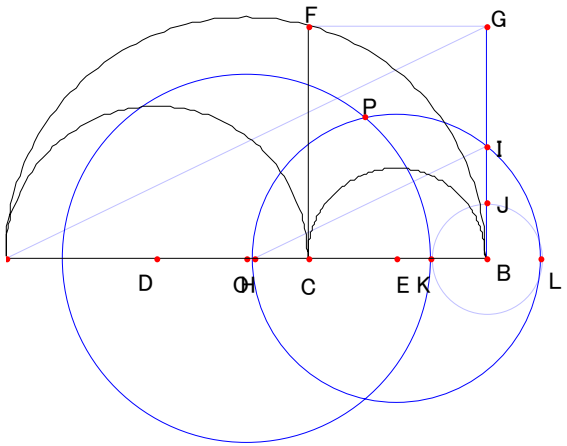
AB 上に点 H を
BH = BG となるようとり
BG 上に点 I を
AG と HI が平行となるようにとり。
J を BI の中点とする。

拡大 縮小



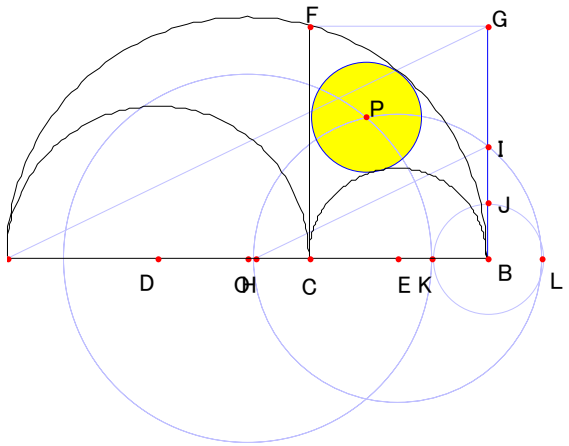
線分 AB 上に点 K を、
AB の延長線上に点 L を
BK = BJ = BL
となるようにとる

拡大 縮小



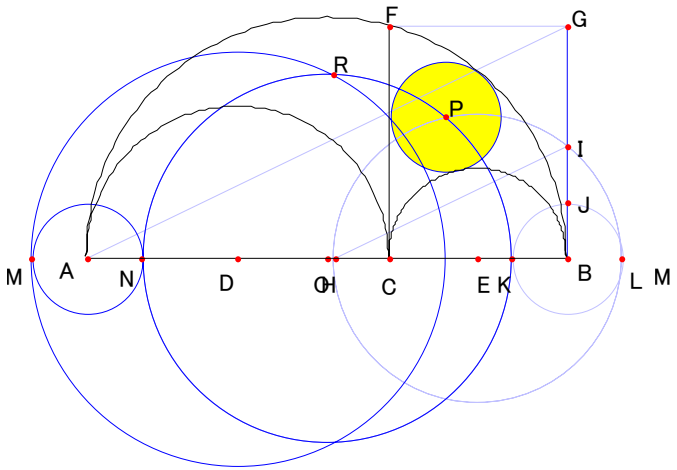
大きい半円の中心を O とする。
図のように
O を中心とし半径 OK の円と
E を中心とし半径 EL の円との
大きい半円内の交点を P とする。

拡大 縮小



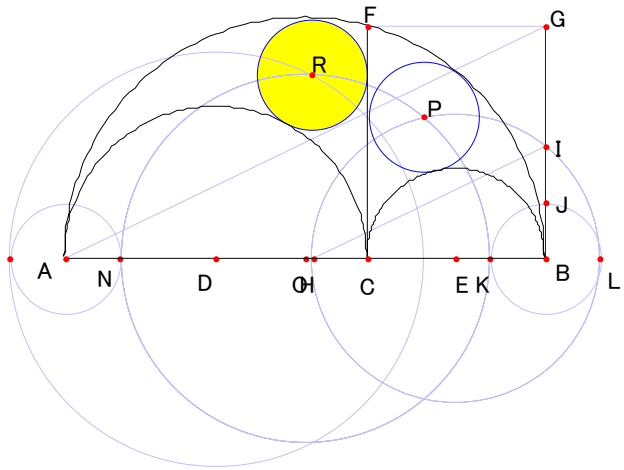
P を中心とし半径 BJ の円が
求める円の一つである。

拡大 縮小



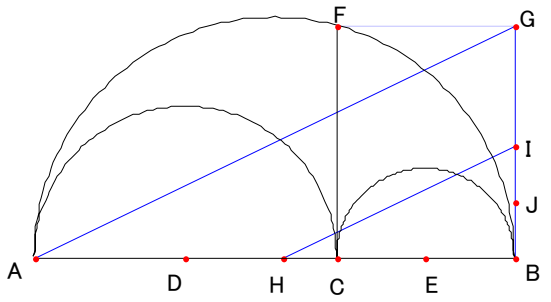
BA の延長線上に点 M を
線分 AB 上に点 M を、
AM = BJ = AN
となるようにとる
O を中心とし半径 ON の円と
D を中心とし半径 DM の円との
大きい半円内の交点を R とする。

拡大 縮小

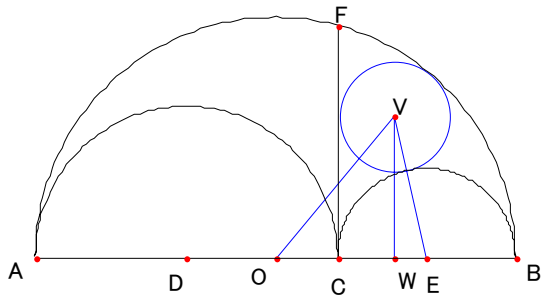


R を中心とし半径 BJ の円が
求める円のもう一つである。

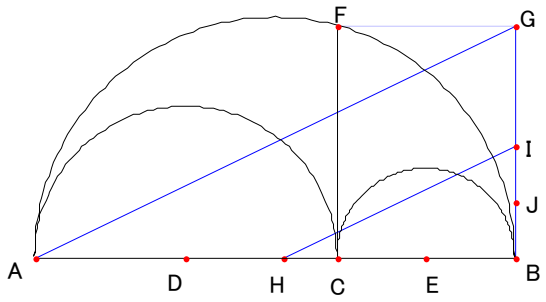
拡大 縮小



拡大 縮小



拡大 縮小



解説

a = AD, b = CE とおく
BJ = ab/(a+b)
である。(理由はあとで)
求める円の半径が ab/(a+b) を示せばよい

a ≧ b として説明します
図の求める円の中心を V とし
半径を r とする。
W を P から AB に下ろした垂線の足とする。
OW + WE = OE = a

$a(OW - WE) = OW^2 - WE^2 = OV^2 - VE^2$

$= (a+b-r)^2 - (b+r)^2$

$= a^2 + 2a(b-r) - 4br$

$a\ OW = a^2 + a(b-r) - 2br$
である。
OC = AC − AO = 2a − (a+b) = a − b
なので
ar = a CW = a(OW − OC)
= 2ab − ar − 2br
よって
r = ab/(a+b)

a = AD, b = CE とおく
BJ = ab/(a+b)
である。

理由

方べきの定理より

$CF^2 = AC \times CF = 4ab$

また HB = GB = FC である。
AG と H が平行なので

$AB \times BI = HB \times GB = CF^2 = AC \times CF = 4ab$

AB = 2(a+b), BJ = BI/2 なので
BJ = ab/(a+b)
である。