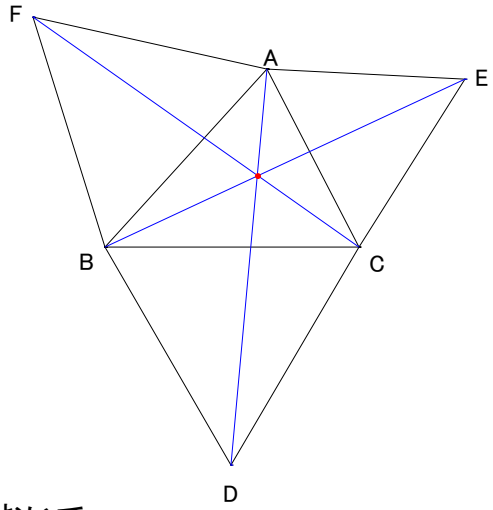
拡大 縮小



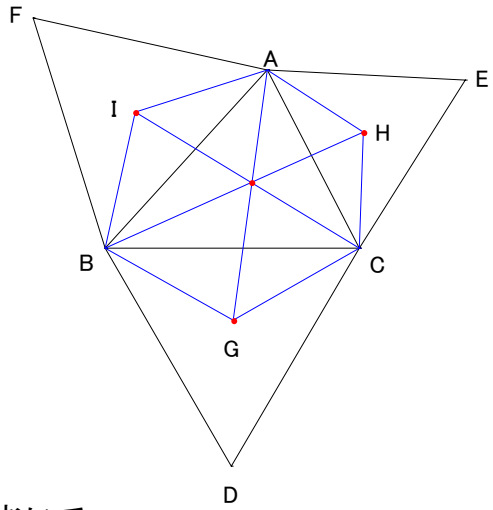
図において
⊿BDC, ⊿CEA, ⊿AFB は
すべて正三角形とする。このとき

AD, BE, CF は一点で交わる。

(特殊な状況なので証明は易)

このように、⊿ABC が与えられたとき
頂点 A, B, C を各々通る三直線が
一点で交わることをテーマに話していこう。

拡大 縮小

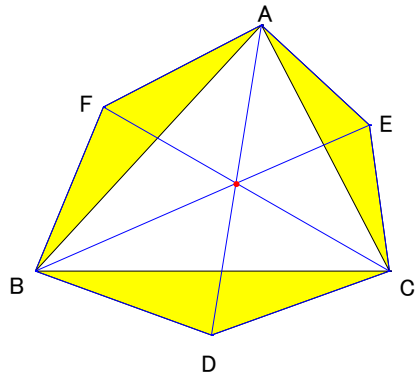


図において
⊿BDC, ⊿CEA, ⊿AFB は
すべて正三角形とする。
G, H, I はその各々の重心とする。
このとき

AG, BH, CI は一点で交わる。

(証明は略)

拡大 縮小



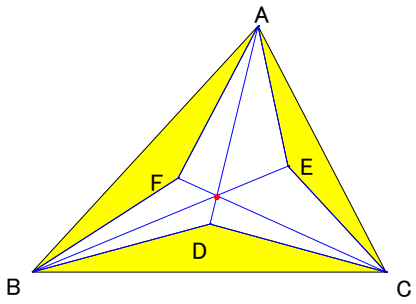
図において
⊿DCB, ⊿EAC, ⊿FBA は
相似な二等辺三角形である。

このとき

AD, BE, CF は一点で交わる。

(証明は略)

拡大 縮小



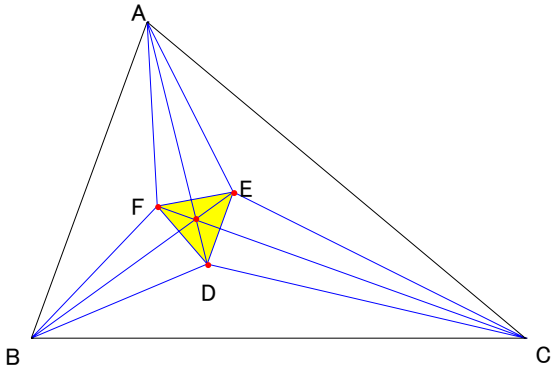
図において
⊿DCB, ⊿EAC, ⊿FBA は
相似な二等辺三角形である。

このとき

AD, BE, CF は一点で交わる。

(証明は略)

拡大 縮小



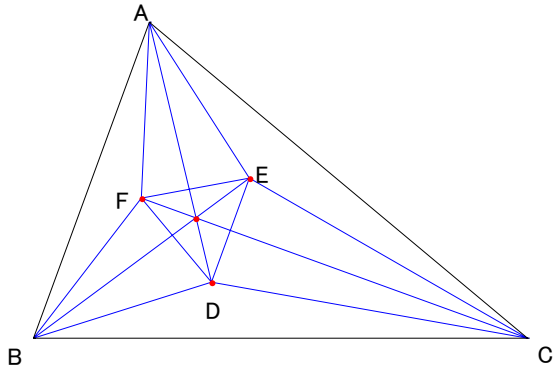
図において
AF, AE は角 A の三等分線
BF, BD は角 B の三等分線
CD, CE は角 C の三等分線である。このとき

AD, BE, CF は一点で交わる。

(証明は略)

⊿DEF が正三角形をなす
という主張はモーレの定理である。

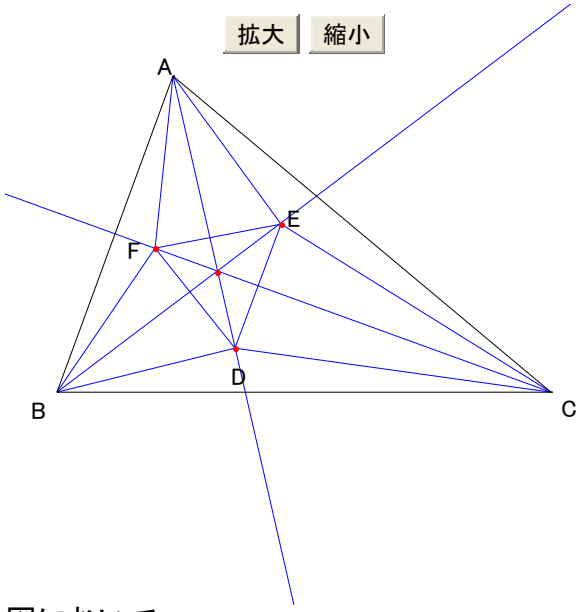
拡大 縮小



図において
AF, AE は角 A の四等分線
BF, BD は角 B の四等分線
CD, CE は角 C の四等分線である。このとき

AD, BE, CF は一点で交わる。

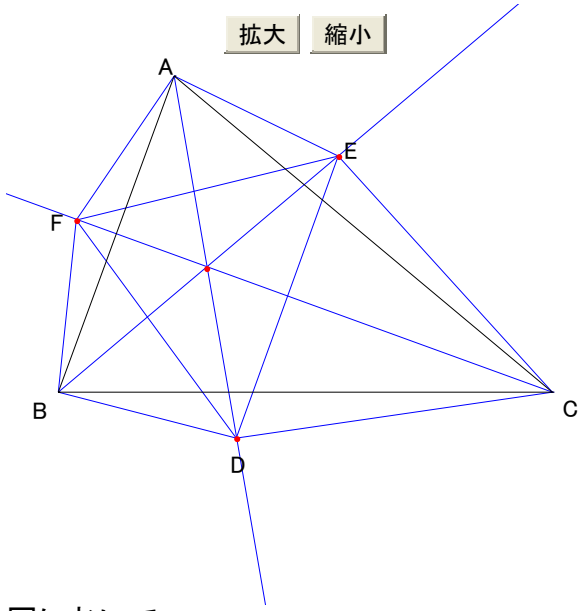
(証明は略)



図において
∠CAE = ∠BAF = r∠CAB
∠ABF = ∠CBD = r∠ABC
∠BCD = ∠ACE = r∠BCA
ただし 0 < r < 1 とする。このとき

AD, BE, CF は一点で交わる。

(証明は略)

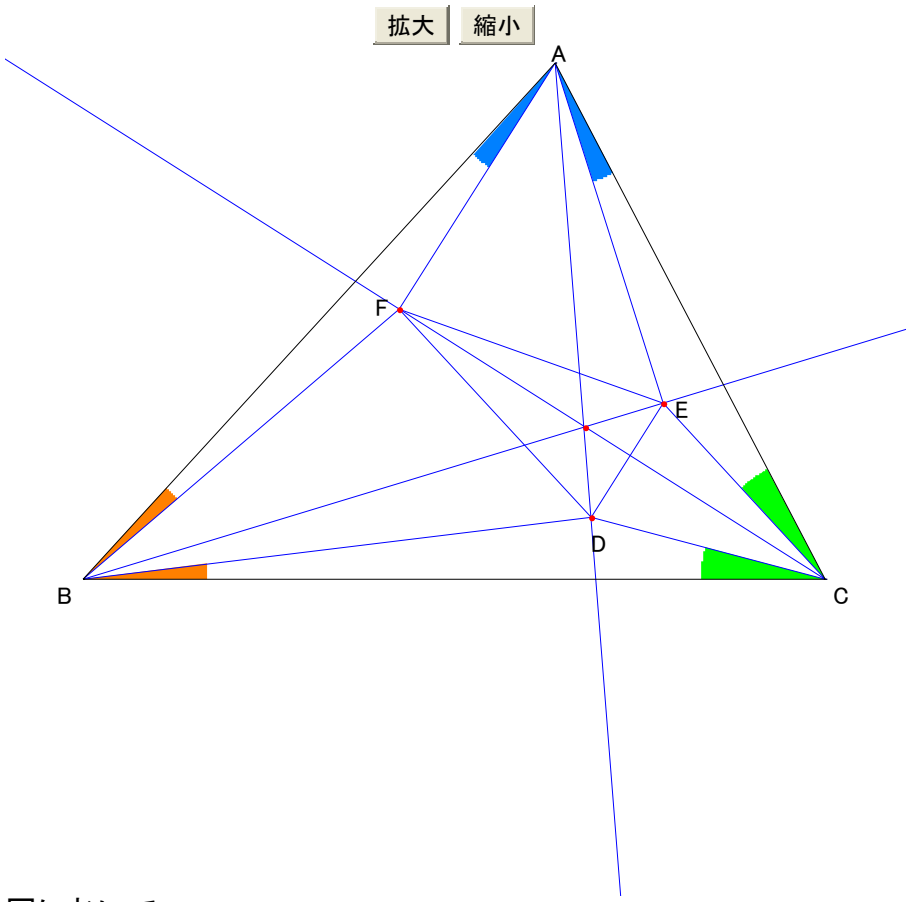


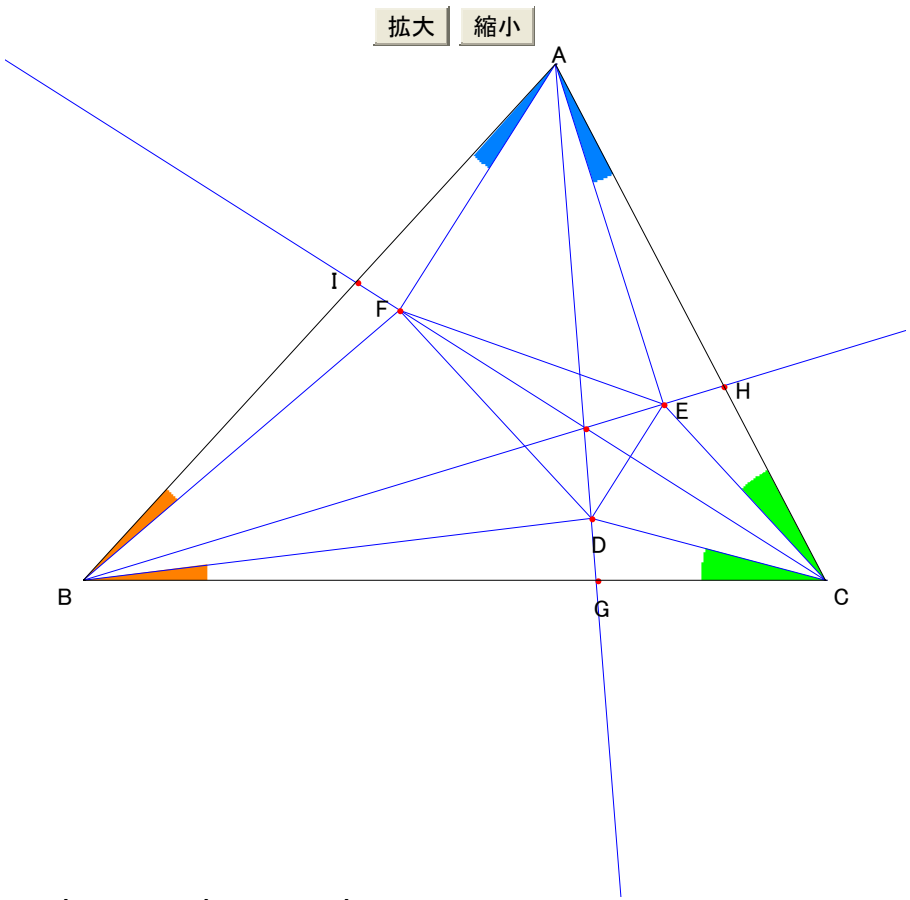
図において
∠CAE = ∠BAF = r(∠CAB の外角1)
∠ABF = ∠CBD = r(∠ABC の外角1)
∠BCD = ∠ACE = r(∠BCA の外角1)
ただし 0 < r < 1 とする。このとき

AD, BE, CF は一点で交わる。

(証明は略)

(外角でも同じだね)





図において
∠CAE = ∠BAF
∠ABF = ∠CBD
∠BCD = ∠ACE
とするとき

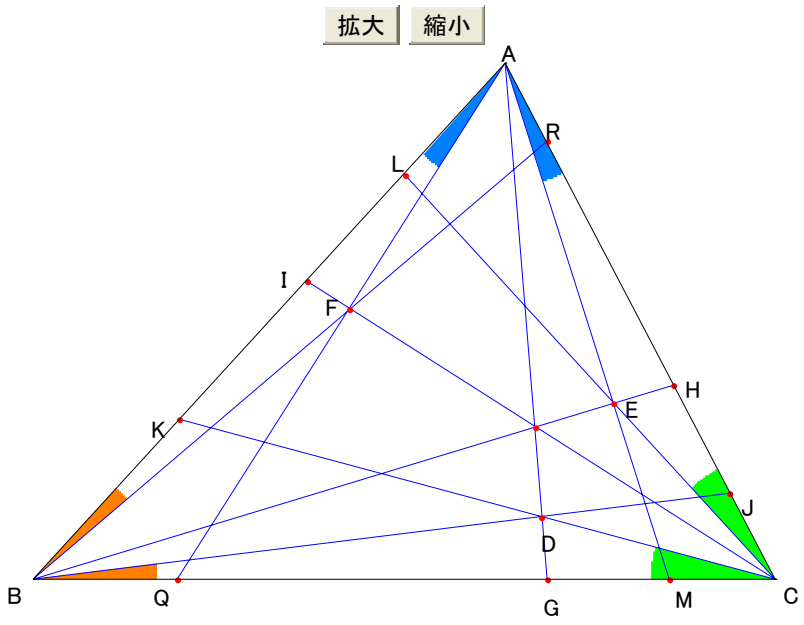
AD, BE, CF は一点で交わる。

証明に続く

AD と BC, BE と CA, CF と AB
との交点を各々 G, H, I とおく

(BG/GC)(CH/HA)(AI/IB) = 1 を示そう。

これが示せれば
AD, BE, CF が一点で交わることがわかる。



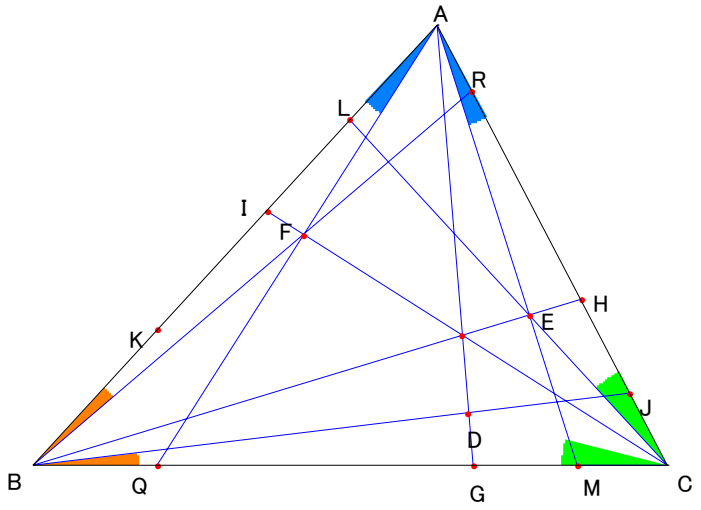
∠CAE = ∠BAF,∠ABF = ∠CBD,
∠BCD = ∠ACE、
G, H, I は各々 AD と BC, BE と CA,
CF と AB の交点とするときとき
(BG/GC)(CH/HA)(AI/IB) = 1 である。
このことを示す

AD と CA,
CD と AB との交点を
各々 J, K とおくと
(BG/GC)(CJ/JA)(AK/KB) = 1
CE と AB, AE と BC との交点を
各々 L, M とおくと
(CH/HA)(AL/LB)(BM/MC) = 1
AF と BC, BF と CA との交点を
各々 Q, R とおくと
(AI/IB)(BQ/QC)(CR/RA) = 1
である。求める結果を得るためには

(CJ/JA)(AK/KB)(AL/LB)
×(BM/MC)(BQ/QC)(CR/RA) = 1

を示せば良い。

拡大 縮小

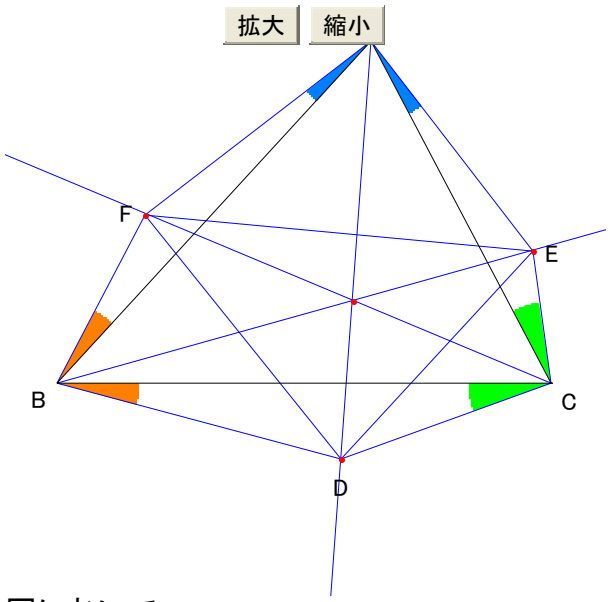


(CJ/JA)(AK/KB)(AL/LB)
×(BM/MC)(BQ/QC)(CR/RA) = 1

を示す。

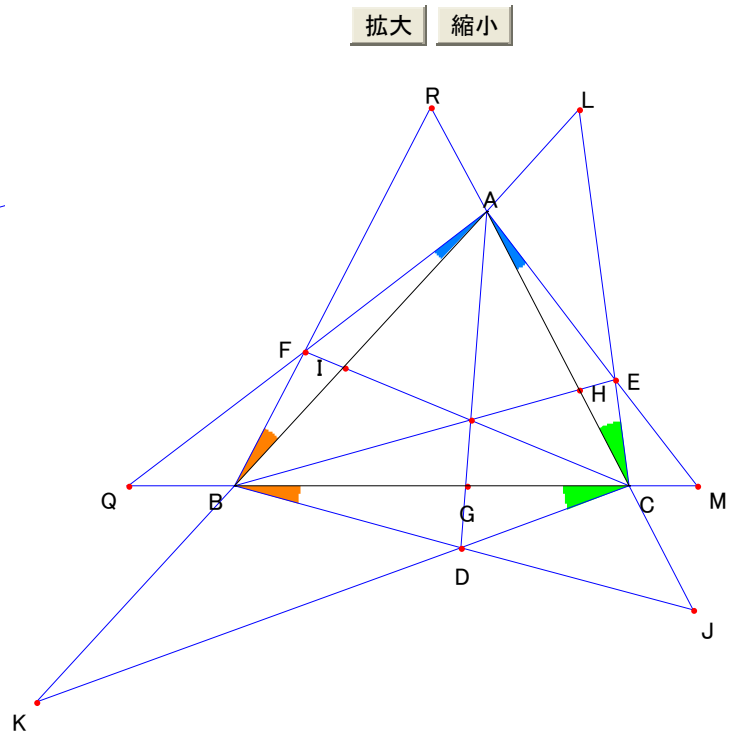
∠CBJ = ∠ABR なので
CJ/RA = ⊿CBJ/⊿ABR
= (BC×BJ)/(BR×BA)
同様に
AK/LB = (CA×CK)/(CB×CL)
AL/KB = (CA×CL)/(CB×CK)
BM/QC = (AB×AM)/(AC×AQ)
BQ/MC = (AB×AQ)/(AC×AM)
CR/JA = (BC×BR)/(BA×BJ)

なので、求める結果を得る。



図において
∠CAE = ∠BAF
∠ABF = ∠CBD
∠BCD = ∠ACE
とするとき

AD, BE, CF は一点で交わる。



図のように
G,H,I,J,K,L,M,Q,R をとる。
(BG/GC)(CH/HA)(AI/IB) = 1
を示す

(BG/GC)(CJ/JA)(AK/KB) = 1
(CH/HA)(AL/LB)(BM/MC) = 1
(AI/IB)(BQ/QC)(CR/RA) = 1

であること利用する。
∠CBJ = ∠ABR なので
CJ/RA = ⊿CBJ/⊿ABR
= (BJ × BC)/(BR × BA)
同様にして
AK/LB = (CK × CA)/(CL × CB)
AL/KB = (CL × CA)/(CK × CB)
BM/QC = (AM × AB)/(AQ × AC)
BQ/MC = (AQ × AB)/(AM × AC)
CR/JA = (BR × BC)/(BJ × BA)
であるので、求める結果を得る。