

$\mathbb{Z}$ の完備化

$\mathbb{Z}$ を完備化したものである $\hat{\mathbb{Z}}$ について考察しよう。

1 一般論

1.1 距離空間の完備化

距離空間をそのコーシー列を利用して完備化する方法をここで展開しよう。

(X, d) を距離空間とする。

X の元の列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ を $\mathbf{x}$ で表わした時には x_n を $\mathbf{x}(n)$ で表わすことにする。

定義 (コーシー列) X の元の列 $\mathbf{x}$ が次を満たすとき、 $\mathbf{x}$ はコーシー列であるという。

任意の正の数 ε に対して、自然数 N を十分大きく選べば

$N \leq i, j$ なる任意の自然数 i, j に対して

$$d(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(j)) < \varepsilon$$

が成り立つ。

コーシー列に対しては次が成り立つ。

命題 (コーシー列) X の元の列 $\mathbf{x}$ に対して

$\mathbf{x}$ はコーシー列

$\iff$

任意の自然数 n に対して 自然数 N を十分大きく選べば

$N \leq i$ なる任意の自然数 i に対して

$$d(\mathbf{x}(N), \mathbf{x}(i)) < \frac{1}{n}$$

が成り立つ。

定義 (収束) X の列 $\mathbf{x}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(n)$$

が X において存在するとき、 $\mathbf{x}$ は X において収束するという。

定義 (コーシー列が同値) 2つの X の元よりなるコーシー列 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)) = 0$$

をみたすとき $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは同値であるといい、

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$$

であるという。

命題 (同値と収束) 2つの X の元よりなるコーシー列 x, y に対して x と y とは同値で y が収束すれば x も同じ値に収束する。

命題 X の元よりなるコーシー列全体のなす集合において、関係 $\sim$ は同値関係になる。

定義 x を X の元よりなるコーシー列とすると、同値関係 $\sim$ による x の同値類を $[x]$ で表わす。

命題 (部分列と同値) x を X の元よりなるコーシー列とし、 y をその部分列とすると

$$x \sim y$$

であり、従って

$$[x] = [y]$$

である。

命題 (部分列と収束) x を X の元よりなるコーシー列とし、 y をその部分列とする。このとき y が収束すれば、 x も同じ値に収束する。

定義 ($\hat{X}$) X の元よりなるコーシー列の $\sim$ による同値類全体のなす集合を $\hat{X}$ で表わす。

命題と定義 X の元 x に対して全ての項が x である列を z_x で表わすことにする。

X の元 x に対して $\hat{X}$ の元 $[z_x]$ を対応させる
 X から $\hat{X}$ への写像は単射である。
これにより、 X を $\hat{X}$ の部分集合とみる。

定理 ($\hat{X}$ は距離空間) 次がなりたつ。

(0) 2つの X の元よりなるコーシー列 x, y に対して

$$d(x(1), y(1)), d(x(2), y(2)), \dots, d(x(n), y(n)), \dots \text{ は}$$

$\mathbb{R}$ のコーシー列である。

従って、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x(n), y(n))$ は収束する。

$$(1) \hat{d}: \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{を } \hat{d}([x], [y]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x(n), y(n))$$

と定めると、これは well-defined である。

(2) $(\hat{X}, \hat{d})$ は距離空間であり、 (X, d) はその部分空間である。

(3) X の元よりなるコーシー列 x に対して

$$[x] = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$$

定義 (正則コーシー列) X の元よりなる列 $\mathbf{x}$ が

任意の自然数 n とそれより大きい任意の自然数 m にたいして

$$d(\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(m)) < \frac{1}{n}$$

をみたすとき、 $\mathbf{x}$ は正則コーシー列という。

命題 (正則コーシー列) X の元よりなる任意のコーシー列 $\mathbf{x}$ に対して、その部分列で正則コーシーであるものが存在する。

定理 ($\hat{X}$ は完備) $\hat{X}$ は完備である。つまり、次が成立する。

$$[\mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_2], \dots, [\mathbf{x}_n], \dots$$

を $\hat{X}$ のコーシー列とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{x}_n]$$

は $\hat{X}$ において収束する。

証明 各 $\mathbf{x}_n$ は正則コーシー列としてよい。

コーシー列はその部分列が収束すれば、もとの列も収束するので、 $[\mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_2], \dots, [\mathbf{x}_n], \dots$ の正則な部分列をとり、それが収束することを示せばよい。

始めから、 $[\mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_2], \dots, [\mathbf{x}_n], \dots$

は正則コーシー列としてよい。

X の列 $\mathbf{y}$ を

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{x}_n(n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とさだめる。

まず $\mathbf{y}$ がコーシー列であることを示す。

ε を正の数とする。

このとき 自然数 n で $\varepsilon > \frac{3}{n}$ を満たすものが存在する m を n より大きな自然数とすると

$[\mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_2], \dots, [\mathbf{x}_n], \dots$ は正則コーシー列なので

$$\hat{d}([\mathbf{x}_n], [\mathbf{x}_m]) < \frac{1}{n}$$

十分大きな自然数 k を選べば

$$n < m < k \text{ で } d(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{x}_m(k)) < \frac{1}{n}$$

を満たすものが存在する。

$\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m$ は正則コーシー列なので

$$d(\mathbf{x}_n(n), \mathbf{x}_n(k)) < \frac{1}{n}, \quad d(\mathbf{x}_m(m), \mathbf{x}_m(k)) < \frac{1}{n}$$

となる。

よって

$$d(\mathbf{y}(n), \mathbf{y}(m)) = d(\mathbf{x}_n(n), \mathbf{x}_m(m))$$

$$\leq d(\mathbf{x}_n(n), \mathbf{x}_n(k)) + d(\mathbf{x}_n(k), \mathbf{x}_m(k)) + d(\mathbf{x}_m(k), \mathbf{x}_m(m)) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon$$

よって $\mathbf{y}$ はコーシー列である。

上記の ε, n, m, k をそのまま流用すると

$$d(\mathbf{y}(k), \mathbf{x}_m(k)) = d(\mathbf{x}_k(k), \mathbf{x}_m(k))$$

$\leq d(\mathbf{x}_k(k), \mathbf{x}_m(k)) + d(\mathbf{x}_m(k), \mathbf{x}_m(m)) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$
 これが $m < k$ なる全ての k について成り立つので

$\hat{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_m) \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$
 が成り立つ。纏めると

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists n$ s.t. $\forall m$ s.t. $n < m$ に対して

$$\hat{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_m) < \varepsilon$$

が成り立っている。よって

$$\mathbf{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n$$

1.2 部分加群の列による距離空間

M を加群とし $\{N_n\}_{N \ni n}$ が M の部分加群の属で次を満たしているとする。

$$N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_n \supset \cdots$$

$$\bigcap_{N \ni n} N_n = \{0_M\}$$

また $N_0 = M$ とおく。

このとき M に $\{N_n\}_{N \ni n}$ により距離を入れて M を距離空間とみる方法を示そう。

定義 (距離関数) $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{n} & N_{n-1} \ni x - y \text{ かつ } N_n \not\ni x - y \text{ のとき} \end{cases}$$

注意 $M \ni x, y$ で $N \ni n$ のとき

$$d(x, y) < \frac{1}{n} \iff N_n \ni x - y$$

が成り立つ。

実際これで、 M は距離空間になる。

定理 (M は距離空間になる)

今までの記号のもと、 (M, d) は距離空間になる。

実際は $M \ni x, y, z$ とするとき、次が成り立っている。

$$(0) \quad d(x, y) \geq 0$$

$$(1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(3) \quad d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$$

特に $d(x, y) < d(y, z)$ のときは $d(x, z) = d(y, z)$ である。

証明 (0),(1),(2) は定義より明らか。

$$(3) \quad n \text{ を自然数として } d(x, y) \leq \frac{1}{n} \text{ かつ } d(y, z) \leq \frac{1}{n} \text{ と仮定する。}$$

このとき $N_{n-1} \ni x - y, y - z$ である。

N_{n-1} は加群なので $N_{n-1} \ni x - z$ である。

このときは $d(x, z) \leq \frac{1}{n}$ となる。

このことから $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ がわかる。

今 $d(x, y) < d(y, z)$ とすると、

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} = d(y, z)$$

である。

$$d(x, z) < d(y, z) \text{ と仮定すると}$$

$$d(y, z) \leq \max\{d(x, y), d(x, z)\} < d(y, z)$$

となり、矛盾。

よって $d(x, z) = d(y, z)$ となる。

M にこの距離をいれて距離空間として、距離空間の位相をいれると次が成り立つ。

定理 (位相加群) 次が成り立つ。

(0) n を自然数とし $N \ni a$ とするとき

a の $\frac{1}{n}$ 近傍は $a + N_n$ である。

(1) M において和は連続である、マイナスをとる写像も連続である。

M は位相加群になる。

1.3 $\hat{M}$ は位相加群である

今までと同じ記号のもと、 $\hat{M}$ が位相加群の構造が入ることを示そう。

M の2つ無限列 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対してその和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ を

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(i) = \mathbf{a}(i) + \mathbf{b}(i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

と定める。

このとき次が成り立つ。

命題 次が成り立つ。

(1) M のコーシー列全体のなす集合は加群をなす。

(2) M の 0_M に収束する、即ち $\mathbf{0}$ と同値なコーシー列全体のなす集合は M のコーシー列全体のなす加群の部分加群をなす。

ただし $\mathbf{0}$ は

$$\mathbf{0}(i) = 0_M \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

で定まる M の列とする。

(3) (1) での加群の (2) での部分加群による商群は集合として $\hat{M}$ と一致する。

$\hat{M}$ にはこの意味で加群の構造を入れて置く。

次の補題は命題が正しいことを保証している。

補題

- (1) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を M のコーシー列とすると
 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ も M のコーシー列である。
 和は結合法則を満たす。
- (2) $\mathbf{0}$ は M のコーシー列である。
 これは M のコーシー列全体のなす集合の中でのゼロである。
- (3) $\mathbf{a}$ を M のコーシー列とするとき $-\mathbf{a}$ を
 $(-\mathbf{a})(i) = -\mathbf{a}(i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$
 で定めると、 $-\mathbf{a}$ は M のコーシー列である。
 $-\mathbf{a}$ は M のコーシー列全体のなす加群の中で $\mathbf{a}$ マイナスの役目を果たす。
- (4) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を M のコーシー列で 0_M に収束するコーシー列とすると
 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ は 0_M に収束するコーシー列である
- (5) $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を M のコーシー列とするとき
 $\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \iff \mathbf{a} - \mathbf{b} \sim \mathbf{0}$

補題の証明は容易にできるでしょう。

$\mathbf{a}$ を M のコーシー列とした時の $\hat{d}([\mathbf{a}], [\mathbf{0}])$ について調べてみよう。

$$\hat{d}([\mathbf{a}], [\mathbf{0}]) = 0 \iff [\mathbf{a}] = [\mathbf{0}]$$

であった。

$s = \hat{d}([\mathbf{a}], [\mathbf{0}]) > 0$ のときを調べよう。

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{a}(n), 0_M)$$

なので $0 < s \leq 1$ である。

よって、自然数 n で

$$\frac{1}{n+1} < s \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n-0.5}$$

を満たすものが存在する。

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{a}(n), 0_M)$$

だったので

$$\mathbb{N} \ni N \text{ s.t. } \mathbb{N} \ni^\forall m \text{ s.t. } N \leq m \text{ に対して } \frac{1}{n+1} < d(\mathbf{a}(m), 0_M) < \frac{1}{n-0.5}$$

距離の定義から、上の m に対しては $d(\mathbf{a}(m), 0_M) = \frac{1}{n}$ が成り立つ。

以上の話から次が成り立つ。

命題 $\hat{M} \ni [\mathbf{a}]$ で $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{0}]$ のとき

$\mathbb{N} \ni^\exists n, N \text{ s.t. } \mathbb{N} \ni^\forall m \text{ s.t. } N \leq m \text{ に対して } d(\mathbf{a}(m), 0_M) = \frac{1}{n}$
 が成立する。

このとき $\hat{d}([\mathbf{a}], [\mathbf{0}]) = \frac{1}{n}$ である。

a 正則コーシー列

$$\iff \mathbb{N} \ni n, m \text{ で } n \leq m \text{ ならば } d(\mathbf{a}(n), \mathbf{a}(m)) < \frac{1}{n}$$

であったことを思い出しておこう。

上の命題において、特に **a** が正則コーシー列の時には次が成り立つ。

命題 **a** が M の正則コーシー列で $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{0}]$ のとき、次が成り立つ。

$$\hat{d}([\mathbf{a}], [\mathbf{0}]) = \frac{1}{n} \iff d(\mathbf{a}(n), 0_M) = \frac{1}{n}$$

証明 $(\Leftarrow)$ m を $n < m$ なる自然数とする。

a が正則コーシー列なので $d(\mathbf{a}(n), \mathbf{a}(m)) < \frac{1}{n}$

$$d(\mathbf{a}(n), 0_M) = \frac{1}{n} \text{ なので}$$

$$d(\mathbf{a}(m), 0_M) = \frac{1}{n} \text{ を得る}$$

$(\Rightarrow)$ 前命題より

$\mathbb{N} \ni \exists n, N \text{ s.t. } \mathbb{N} \ni \forall m \text{ s.t. } N \leq m \text{ に対して } d(\mathbf{a}(m), 0_M) = \frac{1}{n}$
が成立する。

いま m を N と n の双方より大きな自然数とすると

$$N < m \text{ より } d(\mathbf{a}(m), 0_M) = \frac{1}{n}$$

また **a** が正則コーシー列であり $n < m$ なので $d(\mathbf{a}(n), \mathbf{a}(m)) < \frac{1}{n}$

$$\text{よって } d(\mathbf{a}(n), 0_M) = \frac{1}{n}$$

が成立する。

$\hat{M} \ni [\mathbf{a}], [\mathbf{b}]$ のとき $\hat{d}([\mathbf{a}], [\mathbf{b}]) = \hat{d}([\mathbf{a}] - [\mathbf{b}], [\mathbf{0}])$ なので、次が成り立つ。

命題 $\hat{M} \ni [\mathbf{a}], [\mathbf{b}]$ のとき

$$\hat{d}([\mathbf{a}], [\mathbf{b}]) = \begin{cases} 0 & [\mathbf{a}] = [\mathbf{b}] \\ \frac{1}{n} & \mathbb{N} \ni \exists N \text{ s.t. } \mathbb{N} \ni \forall m \text{ s.t. } N \leq m \text{ に対して} \\ & d(\mathbf{a}(m), \mathbf{b}(m)) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

が成り立つ。

a、**b** が正則コーシー列のとき **a** - **b** も正則コーシー列なので、次が成り立つ。

命題 **a**、**b** が正則コーシー列のとき

$$\hat{d}([\mathbf{a}], [\mathbf{b}]) = \begin{cases} 0 & [\mathbf{a}] = [\mathbf{b}] \\ \frac{1}{n} & d(\mathbf{a}(n), \mathbf{b}(n)) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

が成り立つ。

命題 $(\hat{N}_n)$ $\mathbb{N} \ni n$ のとき

$$\hat{N}_n = \{[\mathbf{a}] \mid \mathbf{a} \text{ は正則コーシー列で } N_n \ni \mathbf{a}(n)\}$$

とおくと、

$$\hat{N}_n = \{[a] \mid a \text{ はコーシー列で } \hat{d}([a], [0]) < \frac{1}{n}\}$$

であり、これは $\hat{M}$ の部分加群である。

$\hat{M}$ の距離構造はその部分加群の列 $\{\hat{N}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ による距離構造と一致している。

注意 $\hat{M} \ni [a]$ で $\mathbb{N} \ni n$ のとき $[a]$ の $\frac{1}{n}$ 近傍は

$$[a] + \hat{N}_n$$

である。

1.4 位相環

R を可換環として $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を R のイデアルの列で

$$\begin{cases} I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots \\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0_R\} \end{cases}$$

を満たすものとする。

可換環は加群であり、そのイデアルはその部分加群であるので、与えられたイデアルの列により、 R は距離空間になり、その完備化 $\hat{R}$ が得られる。

R の二つのコーシー列 a と b にたいして、その積 ab を

$$(ab)(i) = a(i)b(i) \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

と定める。このとき ab も R のコーシー列になる。

a と b とが共に正則コーシー列のときにはその積 ab 正則コーシー列になる。

$\hat{R}$ の二つの元 $[a]$ と $[b]$ との対して素の積 $[a][b]$ を $[ab]$ と定めると、これは Well-defined である。この積のもと次が成り立つ。

定理 (イデアルの列による位相環の完備化) 今までの記号のもと

(1) R における積は連続である。 (R は位相環である)

(2) $\hat{R}$ は可換環である。

(3) $\mathbb{N} \ni n$ とするとき

$$\hat{I}_n = \{[a] \mid a \text{ は } R \text{ の正則コーシー列で } I_n \ni a(n)\}$$

とおくと $\hat{I}_n$ は $\hat{R}$ の $\frac{1}{n}$ 近傍であり

$\hat{I}_n$ は $\hat{R}$ イデアルである。

(4) $\hat{R}$ は位相環である。

2 $\mathbb{Z}$ のイデアル列による完備化

2.1 一般論

$s_1, s_2, \dots, s_m, \dots$ を自然数の列で

全ての n に対して $s_n \mid s_{n+1}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ であるものとする。

このとき、 $\mathbb{Z}$ のイデアルの族 $\{s_n \mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は条件

$$\begin{cases} s_1 \mathbb{Z} \supset s_2 \mathbb{Z} \supset s_3 \mathbb{Z} \supset \dots \supset s_n \mathbb{Z} \supset \dots \\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} s_n \mathbb{Z} = \{0\} \end{cases}$$

をみたす。従ってその完備化も得ることができる。

定義 (正規コーシー列) 数列 $\mathbf{a}$ が条件

$$\mathbf{a}(i) \equiv \mathbf{a}(i+1) \pmod{s_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

を満たすとき、 $\mathbf{a}$ は正規コーシー列であるということにする。

(正確には $(\mathbb{Z}, \{s_n \mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}})$ における正規コーシー列というべき)

この $(\mathbb{Z}, \{s_n \mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}})$ における完備化についてもう少し考察しよう。

命題 (1) $\mathbf{a}$ が正規コーシー列のとき

n, m を $n < m$ なる自然数とすると

$$\mathbf{a}(n) \equiv \mathbf{a}(m) \pmod{s_n}$$

が成り立つ。

(2) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を正規コーシー列で互いに同値とすると

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

である。

(3) $\mathbf{a}$ を正規コーシー列のとき、数列 $\mathbf{b}$ を

$$\mathbf{b}(n) \equiv \mathbf{a}(n) \pmod{s_n}$$

で定めると、 $\mathbf{b}$ は正規コーシー列で $\mathbf{a}$ と同値である。

(4) $\mathbf{a}$ をコーシー列とすると正規コーシー列で $\mathbf{a}$ と同値なものが唯一つ存在する。

証明 (1) $\mathbf{a}$ を正規コーシー列とし n, m を $n < m$ とする。

$$\mathbf{a}(n) \equiv \mathbf{a}(n+1) \pmod{s_n} \text{ なので}$$

$$0 \leq \mathbf{a}(n) < s_n \text{ であり } s_n \mathbb{Z} \ni \mathbf{a}(n+1) - \mathbf{a}(n) \text{ である。}$$

同様にして

$$s_{n+1} \mathbb{Z} \ni \mathbf{a}(n+2) - \mathbf{a}(n+1),$$

$$s_{n+2} \mathbb{Z} \ni \mathbf{a}(n+3) - \mathbf{a}(n+2),$$

$\vdots$

$$s_{m-1} \mathbb{Z} \ni \mathbf{a}(m) - \mathbf{a}(n-1) \text{ である。}$$

$$s_n \mathbb{Z} \supset s_{n+1} \mathbb{Z} \supset s_{n+2} \mathbb{Z} \supset \dots \supset s_{m-1} \mathbb{Z} \text{ なので}$$

$$s_n \mathbb{Z} \ni \mathbf{a}(m) - \mathbf{a}(n)$$

$$0 \leq \mathbf{a}(n) < s_n \text{ だったので}$$

$$\mathbf{a}(n) = \mathbf{a}(m) \text{ Mod } s_n$$

を得る。

(2) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を正規コーシー列で互いに同値とする。

n を任意の自然数とすると

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が同値なので、この n に対して自然数 m を十分大きく選べば

$n < m$ かつ $\mathbf{a}(m) \equiv \mathbf{b}(m) \pmod{s_n}$ となる。

(1) より $\mathbf{a}(n) = \mathbf{a}(m) \text{ Mod } s_n$ で $\mathbf{b}(n) = \mathbf{b}(m) \text{ Mod } s_n$ が成り立っているので
 $\mathbf{a}(n) = \mathbf{b}(n)$ を得る。

よって $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ である。

(3) n を任意の自然数とする。

$\mathbf{a}$ が正則コーシー列なので

$$\mathbf{a}(n) \equiv \mathbf{a}(n+1) \pmod{s_n}$$

である。

$$\mathbf{b}(n+1) = \mathbf{a}(n+1) \text{ Mod } s_{n+1}$$

なので

$\mathbf{b}(n+1) \equiv \mathbf{a}(n+1) \pmod{s_n}$ である。

よって

$$\mathbf{a}(n) \equiv \mathbf{b}(n+1) \pmod{s_n}$$

故に

$$\mathbf{b}(n) = \mathbf{a}(n) \text{ Mod } s_n = \mathbf{b}(n+1) \text{ Mod } s_n$$

これより $\mathbf{b}$ が正則コーシー列であることがわかる。

m を n より大きい自然数とする。

定義より

$$\mathbf{b}(m) \equiv \mathbf{a}(m) \pmod{s_m}$$

であり $c_n | c_m$ なので

$$\mathbf{b}(m) \equiv \mathbf{a}(m) \pmod{s_n}$$

である。

よって $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ と同値である。

(4) $\mathbf{a}$ をコーシー列とするとそれと同値な正則コーシー列が存在する。

その正則コーシー列に対してそれと同値な正規コーシー列が存在する。

よって $\mathbf{a}$ と同値な正規コーシー列が存在する。

$\mathbf{a}$ と同値な正規コーシー列が唯一しかないことは (2) が保証している。

定義 コーシー列 $\mathbf{a}$ にたいしてそれと同値な正規コーシー列を $\mathbf{a}$ の正規化
 といい $N(\mathbf{a})$ であらわすことにする。

前命題の (4) をもう少し具体的に、表現すると次のようになる。

命題 (コーシー列から正規コーシー列の作成)

(1) $\mathbf{a}$ をコーシー列とすると

任意の自然数 n に対して 自然数 N で

$N \leq m$ なる全ての自然数 m に対して

$$\mathbf{a}(N) \equiv \mathbf{a}(m) \pmod{s_n}$$

を満たすものがある。

このとき

$$N(\mathbf{a})(n) = \mathbf{a}(N) \text{ Mod } s_n$$

である。

(2) $\mathbf{a}$ を正則コーシー列とすると

$$N(\mathbf{a})(n) = \mathbf{a}(n) \text{ Mod } s_n$$

である。

正規コーシー列はその部分列があればそれ自身が回復できる。つまり次が成り立つ。

命題 (正規コーシー列の部分列からの作成)

$m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ を自然数の狭義単調増加列とする。

整数の列 $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_n}, \dots$ が条件

$$a_{m_i} = a_{m_{i+1}} \text{ Mod } s_{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

を満たしているとき、数列 $\mathbf{a}$ を

$$\mathbf{a}(n) = a_{m_k} \text{ Mod } s_n \quad (\text{ただし } n \leq m_k \text{ となる } k \text{ を選ぶ})$$

と定義すると、 $\mathbf{a}$ は $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_n}, \dots$ を

その一部に含む、つまり

$$\mathbf{a}(m_i) = a_{m_i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

をみたす、正規コーシー列である。

これを、 $\{a_{m_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ から作れる正規コーシー列という。

2.2 $\mathbb{Z}_p$

p 素数とするとき このとき

$\mathbb{Z}$ のイデアルの族 $\{p^n \mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}}$ による $\mathbb{Z}$ の完備化を $\mathbb{Z}_p$ で表わすことにする。

また $(\mathbb{Z}, \{p^n \mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}})$ でのコーシー列 $\mathbf{a}$ の $\mathbb{Z}_p$ でのクラスを $[\mathbf{a}]_p$ と表わすことにする。

また $\mathbf{a}$ のここでの正規化を $N_p(\mathbf{a})$ で表わすことにする。

またここでの距離関数を d_p ($\mathbb{Z}$ でも $\mathbb{Z}_p$ でも) で表わすことにする。

一般論のここでの翻訳を注意の形で記述しておく。

注意 $(\mathbb{Z}, \{p^n \mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}})$ において次が成り立つ。

(1) $\mathbf{a}$ がコーシー列

$$\iff \mathbb{N} \ni \forall n \text{ に対して } \mathbb{N} \ni \exists N \text{ s.t.}$$

$$\mathbb{N} \ni \forall m \text{ s.t. } N < m \text{ に対して } p^n \mid \mathbf{a}(N) - \mathbf{a}(m)$$

- (2) $\mathbf{a}$ が正則コーシー列
 $\iff \mathbb{N} \ni \forall n, m \text{ s.t. } n < m \text{ に対して } p^n \mid \mathbf{a}(n) - \mathbf{a}(m)$
- (3) $\mathbf{a}$ が正規コーシー列
 $\iff \mathbb{N} \ni \forall n \text{ に対して } \mathbf{a}(n) = \mathbf{a}(n+1) \text{ Mod } p^n$
 $\iff \mathbb{N} \ni \forall n, m \text{ s.t. } n < m \text{ に対して } \mathbf{a}(n) = \mathbf{a}(m) \text{ Mod } p^n$

2.3 $\hat{\mathbb{Z}}$

$\mathbb{Z}$ のイデアルの族 $\{(n+1)!\mathbb{Z}\}_{\mathbb{N} \ni n}$ による $\mathbb{Z}$ の完備化を単に $\hat{\mathbb{Z}}$ であらわすことにする。また $(\mathbb{Z}, \{(n+1)!\mathbb{Z}\}_{\mathbb{N} \ni n})$ のコーシー列 $\mathbf{a}$ の $\hat{\mathbb{Z}}$ でクラスを単に $[\mathbf{a}]$ と表わすことにする。

さらに $\mathbf{a}$ のここでの正規化を単に $N(\mathbf{a})$ で表わすことにする。
 またここでの距離関数を単に d ($\mathbb{Z}$ でも $\hat{\mathbb{Z}}$ でも) で表わすことにする。

一般論のここでの翻訳を注意の形で記述しておく。

注意 $(\mathbb{Z}, \{(n+1)!\mathbb{Z}\}_{\mathbb{N} \ni n})$ において次が成り立つ。

- (1) $\mathbf{a}$ がコーシー列
 $\iff \mathbb{N} \ni \forall n \text{ に対して } \mathbb{N} \ni \exists N \text{ s.t.}$
 $\mathbb{N} \ni \forall m \text{ s.t. } N < m \text{ に対して } (n+1)! \mid \mathbf{a}(N) - \mathbf{a}(m)$
- (2) $\mathbf{a}$ が正則コーシー列
 $\iff \mathbb{N} \ni \forall n, m \text{ s.t. } n < m \text{ に対して } (n+1)! \mid \mathbf{a}(n) - \mathbf{a}(m)$
- (3) $\mathbf{a}$ が正規コーシー列
 $\iff \mathbb{N} \ni \forall n \text{ に対して } \mathbf{a}(n) = \mathbf{a}(n+1) \text{ Mod } (n+1)!$
 $\iff \mathbb{N} \ni \forall n, m \text{ s.t. } n < m \text{ に対して } \mathbf{a}(n) = \mathbf{a}(m) \text{ Mod } (n+1)!$

2.4 $\hat{\mathbb{Z}}$ と $\mathbb{Z}_p$ との関係

$(n+1)!$ の素因数分解に関する関数を定義しておこう。

定義 $(\phi_p(n))$ p を素数とし、 n を自然数とすると

$$\phi_p(n) = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid p^m \text{ は } (n+1)! \text{ の約数}\}$$

と $\phi_p(n)$ を定義する。

この記号の下、次が成り立つ。

命題 n を自然数とすると、次が成り立つ。

- (1) 全ての素数 p に対して $\phi_p(n)$ はゼロ以上の整数である。

$$(2) \quad (n+1)! = \prod_{p \text{ は prime } \phi_p(n) > 0} p^{\phi_p(n)} \text{ は } (n+1)! \text{ の素因数分解である。}$$

素数 p に対して $\hat{\mathbb{Z}}$ から $\mathbb{Z}_p$ への自然な写像を定義する。

定理 p を素数とする。このとき

数列 $\mathbf{a}$ が $(\mathbb{Z}, \{(n+1)!\mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ の正則コーシー列とすると

$\mathbf{a}$ は $(\mathbb{Z}, \{p^n \mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ におけるコーシー列になっている。

(2) $\mathbf{a}$ が $(\mathbb{Z}, \{(n+1)!\mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ において $\mathbf{0}$ と同値な正則コーシー列とすると

$\mathbf{a}$ は $(\mathbb{Z}, \{p^n \mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ において $\mathbf{0}$ と同値なコーシー列である。

(3) $\hat{\mathbb{Z}}$ から $\mathbb{Z}_p$ への環準同型写像で $\hat{\mathbb{Z}}$ の元 $[\mathbf{a}]$ に対して $\mathbb{Z}_p$ の元 $[\mathbf{a}]_p$ を対応させる写像は Well-defined であり、環準同型写像である。この写像を φ_p で表わす。

$$\varphi_p : \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

であり、

$$\varphi_p([\mathbf{a}]) = [\mathbf{a}]_p$$

である。

証明 (1) n を自然数とする。自然数 n' を $(n'+1)!$ が p^n の倍数となるよう十分大きく選ぶ。($n' = p^n$ で十分)

$\mathbf{a}$ が $(\mathbb{Z}, \{(n+1)!\mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ のコーシー列なので 自然数 N を十分大きく選べば $N \leq m$ なる全ての自然数 m に対して $(n'+1)!\mathbb{Z} \ni \mathbf{a}(m) - \mathbf{a}(N)$ となる。

$(n'+1)!$ が p^n の倍数だったので

$$p^n \mathbb{Z} \ni \mathbf{a}(m) - \mathbf{a}(N)$$

となる。よって $\mathbf{a}$ は $(\mathbb{Z}, \{p^n \mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ におけるコーシー列になっている。

(2) n を自然数とする。自然数 n' を $(n'+1)!$ が p^n の倍数となるよう十分大きく選ぶ。

$\mathbf{a}$ が $(\mathbb{Z}, \{(n+1)!\mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ の $\mathbf{0}$ と同値なコーシー列なので 自然数 N を十分大きく選べば

$N \leq m$ なる全ての自然数 m に対して $(n'+1)!\mathbb{Z} \ni \mathbf{a}(m)$ となる。

$(n'+1)!$ が p^n の倍数だったので

$$p^n \mathbb{Z} \ni \mathbf{a}(m)$$

となる。よって $\mathbf{a}$ は $(\mathbb{Z}, \{p^n \mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ における $\mathbf{0}$ と同値な収束するコーシー列になっている。

(3) φ_p の定義が well-defined であることは (1), (2) より明らかであり、環準同型写像になっていることはもっと明らかである。

φ_p について考察を続けよう。

$\mathbf{a}$ を $(\mathbb{Z}, \{(n+1)!\mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ における正則コーシー列とする。このとき

$$\varphi_p([\mathbf{a}]) = [\mathbf{a}]_p = [N_p(\mathbf{a})]_p$$

である。ここで $N_p(\mathbf{a})$ は $\mathbf{a}$ の $(\mathbb{Z}, \{p^n \mathbb{Z}\}_{N \ni n})$ における正規化 であり、そ

れは次のように定まっている。

$$N_p(\mathbf{a})(n) = \mathbf{a}(n) \bmod p^n$$

(ただし m は $n \leq \phi_p(m)$ 満たす自然数ならなんでもよい。)

とくに全ての自然数 m にたいして

$$N_p(\mathbf{a})(\phi_p(m)) = \mathbf{a}(m) \bmod p^{\phi_p(m)}$$

が成り立っている。

以上の準備のもと次が成り立つ

定理 ($\hat{\mathbb{Z}}$ と $\prod \mathbb{Z}_p$)

$$\prod_{p \text{ は prime}} \varphi_p : \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \prod_{p \text{ は prime}} \mathbb{Z}_p$$

は同型写像である。

証明の前に Chinese Remainder Theorem について思い出しておく。

定理 (Chinese Remainder Theorem)

m と n を互いに素な二つの自然数とすると

自然な順同型写像

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

は同型写像である。

($x + mn\mathbb{Z}$ を $(x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$ に移す写像が当該の自然な順同型写像である。)

注意 m と n を互いに素な二つの自然数とする。このとき

$0 \leq a < m, 0 \leq b < n$ なる全ての自然数に対して

$0 \leq c < mn$ なる自然数 c で

$$c + m\mathbb{Z} = a + m\mathbb{Z}, c + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z}$$

を満たすものが唯一つ存在する。

この Chinese Remainder Theorem はもっと一般に次のようになる。

定理 (Chinese Remainder Theorem)

$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_s^{e_s}$ を m の素因数分解とする。このとき

$$0 \leq a_1 < p_1^{e_1}, 0 \leq a_2 < p_2^{e_2}, \dots, 0 \leq a_s < p_s^{e_s}$$

なる全ての整数の組 $a_1, a_2, \dots, a_s$ に対して

$0 \leq a < m$ なる整数 a で

$$a + p_i^{e_i} \mathbb{Z} = a_i + p_i^{e_i} \mathbb{Z} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

を満たすものが唯一つ存在する。

単射の証明 $\hat{\mathbb{Z}} \ni [\mathbf{a}]$ で $(\prod_{p \text{ は prime}} \varphi_p)([\mathbf{a}])$ がゼロとする。

このとき、全ての素数 p に対して $\varphi_p([\mathbf{a}]) = [0]_p$ である。

$\mathbf{a}$ は $(\mathbb{Z}, \{(n+1)!\mathbb{Z}\}_{n \geq 0})$ での正規コーシー列としてよい。

p を素数とすると

$$[0]_p = \varphi_p([a]) = [N_p(a)]_p$$

であり $N_p(a)$ は $(\mathbb{Z}, \{p^n \mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}})$ での正規コーシー列なので

$$N_p(a) = 0$$

が成り立つ。

n を自然数とすると

$$(n+1)! = \prod_{p \text{ prime } \phi_p > 0} p^{\phi_p(n)} \text{ は } (n+1)! \text{ の素因数分解である。}$$

$$0 = N_p(a)(\phi_p(n)) = a(n) \text{ Mod } p^{\phi_p(n)}$$

$$0 \leq a(n) < (n+1)! \text{ であったので } a(n) = 0 \text{ がわかる。}$$

よって $(\prod_{p \text{ prime}} \varphi_p)$ が単射であることが分かる。

全射の証明 $\prod_{p \text{ prime}} \mathbb{Z}_p \ni ([a_p]_p)$ とする。

a_p は $(\mathbb{Z}, \{p^n \mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}})$ における正規コーシー列としてよい。

全ての自然数 n に対して

$$(n+1)! = \prod_{p \text{ prime } \phi_p > 0} p^{\phi_p(n)} \text{ は } (n+1)! \text{ の素因数分解なので。}$$

方程式

$$x + p^{\phi_p(n)} \mathbb{Z} = a_p(\phi_p(n)) + p^{\phi_p(n)} \mathbb{Z} \text{ (ただし } p \text{ は prime で } \phi_p > 0)$$

は $0 \leq x < (n+1)!$ の範囲でただ一つ解をもつ、その解を $a(n)$ とする数列 a をつくる。

このとき a は $(\mathbb{Z}, \{(n+1)! \mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}})$ における正規コーシー列であり

$$(\prod_{p \text{ prime}} \varphi_p)([a]) = ([a_p]_p) \text{ である。}$$

a が正規コーシー列になる主張は次のように示す。

p を $\phi_p(n) > 0$ なる素数とすると

$$a(n+1) \text{ Mod } p^{\phi_p(n+1)} = a_p(p^{\phi_p(n+1)})$$

なので

$$a(n+1) \text{ Mod } p^{\phi_p(n)} = a_p(\phi_p(n+1)) \text{ Mod } p^{\phi_p(n)} = a_p(\phi_p(n)) = a(n) \text{ Mod } p^{\phi_p(n)}$$

よって、Chinese Remainder Theorem より

$$a(n+1) \text{ Mod } (n+1)! = a(n)$$

を得る。