

循環小数観察

$\frac{1}{7}$ を循環小数で表わし、その様子を観察しよう。

$$\begin{array}{r}
 142857 \\
 7 \overline{) 1000000} \\
 \underline{7} \\
 30 \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 \underline{14} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 40 \\
 \underline{35} \\
 50 \\
 \underline{49} \\
 1
 \end{array}$$

左の計算から分かるように

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857142857142857 \dots$$

小数点以下 142857 が繰り返しあらわれる。

$\frac{1}{7} = 0.14285\overline{7}$ と $\frac{1}{7}$ は循環小数として表わされる。

左の計算は次の計算を続けたものである。

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 7 \overline{) 10} \\
 \underline{7} \\
 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 7 \overline{) 30} \\
 \underline{28} \\
 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2 \\
 7 \overline{) 20} \\
 \underline{14} \\
 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8 \\
 7 \overline{) 60} \\
 \underline{56} \\
 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 \\
 7 \overline{) 40} \\
 \underline{35} \\
 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \\
 7 \overline{) 50} \\
 \underline{49} \\
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 428571 \\
 7 \overline{) 3000000} \\
 \underline{28} \\
 20 \\
 \underline{14} \\
 60 \\
 \underline{56} \\
 40 \\
 \underline{35} \\
 50 \\
 \underline{49} \\
 10 \\
 \underline{7} \\
 3
 \end{array}$$

左の計算より

$$\frac{3}{7} = 0.42857\overline{1} \text{ がわかる。}$$

もっとも、左の計算でなく、上の計算よりも分かる。

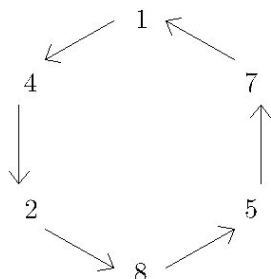
上の計算から、次も分かる。

$$\frac{2}{7} = 0.285714$$

$$\frac{6}{7} = 0.857142$$

$$\frac{4}{7} = 0.571428$$

$$\frac{5}{7} = 0.714285$$



$$10 \times 1 = 7 \times 1 + 3$$

$$10 \times 3 = 7 \times 4 + 2$$

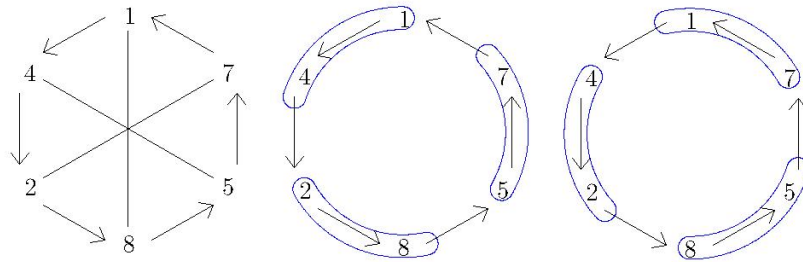
$$10 \times 2 = 7 \times 2 + 6$$

$$10 \times 6 = 7 \times 8 + 4$$

$$10 \times 4 = 7 \times 5 + 5$$

$$10 \times 5 = 7 \times 7 + 1$$

分母が7の既約分数を循環小数に表わしたとき、1,4,2,8,5,7 が循環してあらわれる。



1, 4, 2, 8, 5, 7 の循環の表から次を観察しよう。

- (1) 真正面の対角の和は 9
- (2) $14 + 28 + 57 = 99$
- (3) $42 + 85 + 71 = 198$

分母が 13 の既約分数を循環小数に表わしたときの循環を観察しよう。

$$\begin{array}{r}
 76923 \\
 13 \overline{) 1000000} \\
 \underline{91} \\
 90 \\
 \underline{78} \\
 120 \\
 \underline{117} \\
 30 \\
 \underline{26} \\
 40 \\
 \underline{39} \\
 1
 \end{array}$$

左の計算は

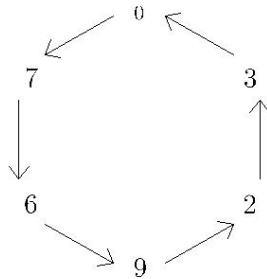
$$\begin{aligned}
 10 \times 1 &= 13 \times 0 + 10 \\
 10 \times 10 &= 13 \times 7 + 9 \\
 10 \times 9 &= 13 \times 6 + 12 \\
 10 \times 12 &= 13 \times 9 + 3 \\
 10 \times 3 &= 13 \times 2 + 4 \\
 10 \times 4 &= 13 \times 3 + 1
 \end{aligned}$$

を筆記算で表わしたものである。

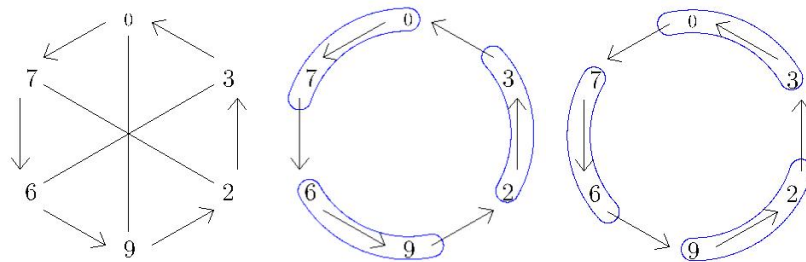
これより

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1}{13} = 076923 & \frac{10}{13} = 769230 \\
 \frac{9}{13} = 692307 & \frac{12}{13} = 923076 \\
 \frac{3}{13} = 230769 & \frac{4}{13} = 307692
 \end{array}$$

がわかる。



これも、分母が 7 のときと同じ観察をしよう



- (1) 真正面の対角の和は 9
- (2) $07 + 69 + 23 = 99$
- (3) $76 + 92 + 30 = 198$

分母が 13 の既約分数でもう一つの型も調べてみよう。

$$\begin{array}{r}
 153846 \\
 13 \overline{) 2000000} \\
 \underline{13} \\
 70 \\
 \underline{65} \\
 50 \\
 \underline{39} \\
 110 \\
 \underline{104} \\
 60 \\
 \underline{52} \\
 80 \\
 \underline{78} \\
 2
 \end{array}$$

左の計算は

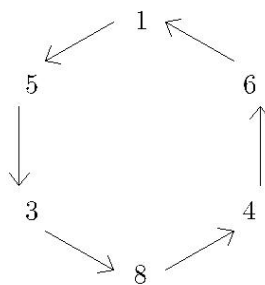
$$\begin{aligned}
 10 \times 2 &= 13 \times 1 + 7 \\
 10 \times 7 &= 13 \times 5 + 5 \\
 10 \times 5 &= 13 \times 3 + 11 \\
 10 \times 11 &= 13 \times 8 + 6 \\
 10 \times 6 &= 13 \times 4 + 8 \\
 10 \times 8 &= 13 \times 6 + 2
 \end{aligned}$$

を筆記計算したものである。

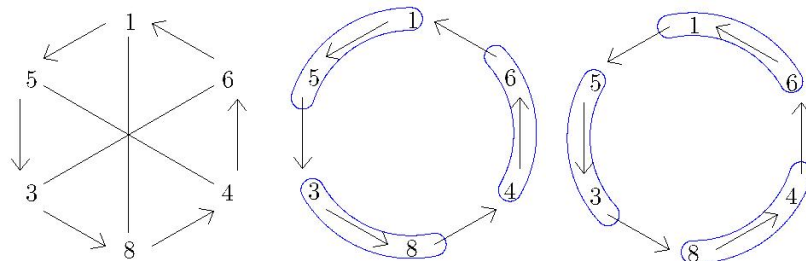
これより

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{13} &= 153846\dot{1} & \frac{7}{13} &= \dot{5}38461 \\
 \frac{5}{13} &= 38461\dot{5} & \frac{11}{13} &= \dot{8}46153 \\
 \frac{6}{13} &= 46153\dot{8} & \frac{8}{13} &= \dot{6}15384
 \end{aligned}$$

がわかる。



これも同様な観察をしよう。



(1) 真正面の対角の和は 9

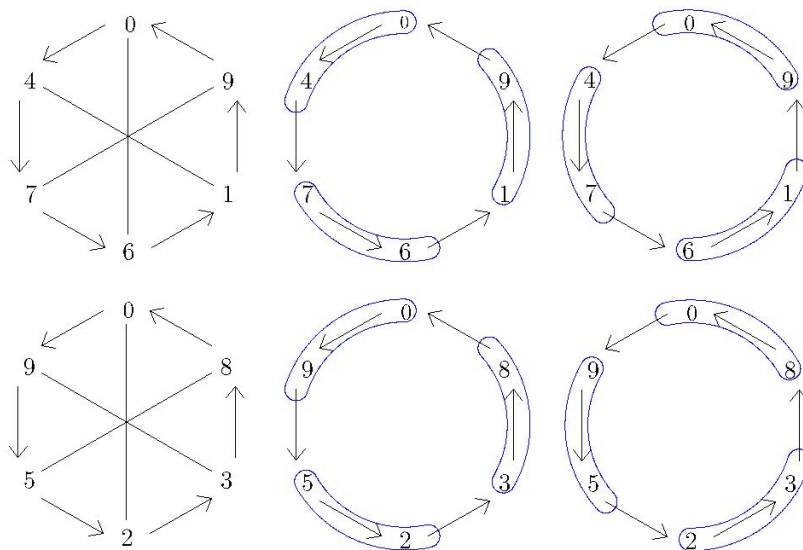
(2) $15 + 38 + 46 = 99$

(3) $53 + 84 + 61 = 198$

次に分母が 21 の既約分数の循環の様子を観察しよう

$$\begin{array}{r}
 47619 \\
 21 \overline{) 1000000} \\
 \underline{84} \\
 160 \\
 \underline{147} \\
 130 \\
 \underline{126} \\
 40 \\
 \underline{21} \\
 190 \\
 \underline{189} \\
 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 95238 \\
 21 \overline{) 2000000} \\
 \underline{189} \\
 110 \\
 \underline{105} \\
 50 \\
 \underline{42} \\
 80 \\
 \underline{63} \\
 170 \\
 \underline{168} \\
 2
 \end{array}$$



(0) 真正面の対角の和は 9 ではない

(1) $04 + 76 + 19 = 99$

(2) $47 + 61 + 90 = 198$

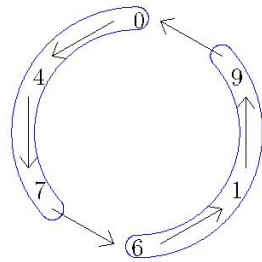
(0) 真正面の対角の和は 9 ではない

(1) $09 + 52 + 38 = 99$

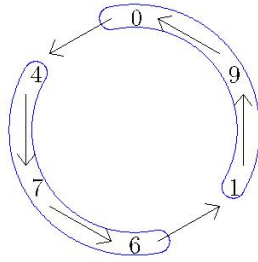
(2) $95 + 23 + 80 = 198$

分母 21 の場合は分母が 7 や 13 と同じ場合と異なる場合がありますね。

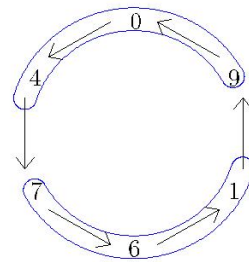
三桁ずつの和ではどうなるか見てみよう。



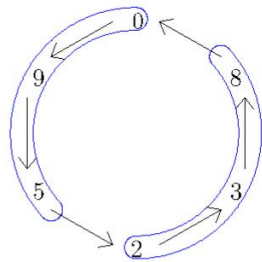
$$047 + 619 = 666$$



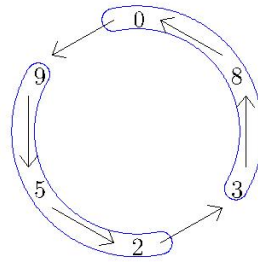
$$476 + 190 = 666$$



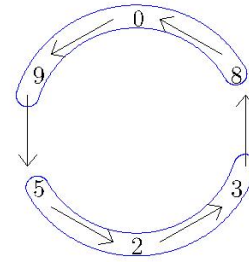
$$761 + 904 = 1665$$



$$095 + 238 = 333$$



$$952 + 380 = 1332$$



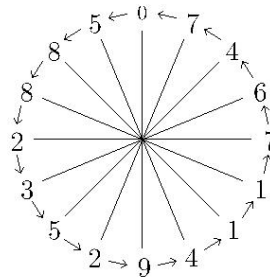
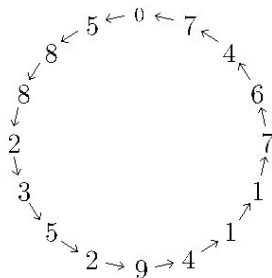
$$523 + 809 = 1332$$

みな 333 の倍数になりますね

分母が 17 の小数ではどうなるかな？

$$\frac{1}{17} = 0.0588235294117647$$

これは循環の長さが 16 で 循環の節が 0588235294117647 の循環小数である。



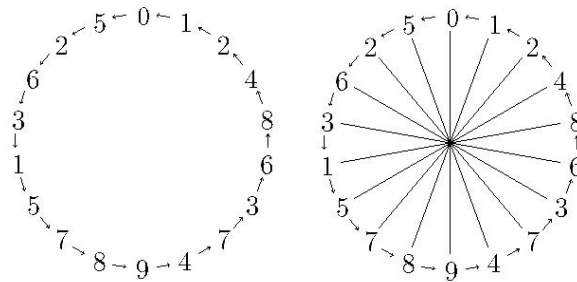
これは真正面の対角の和は 9 に成っていますね。

分母が 19 の小数ではどうなるかな？

$$\frac{1}{19} = 0.052631578947368431$$

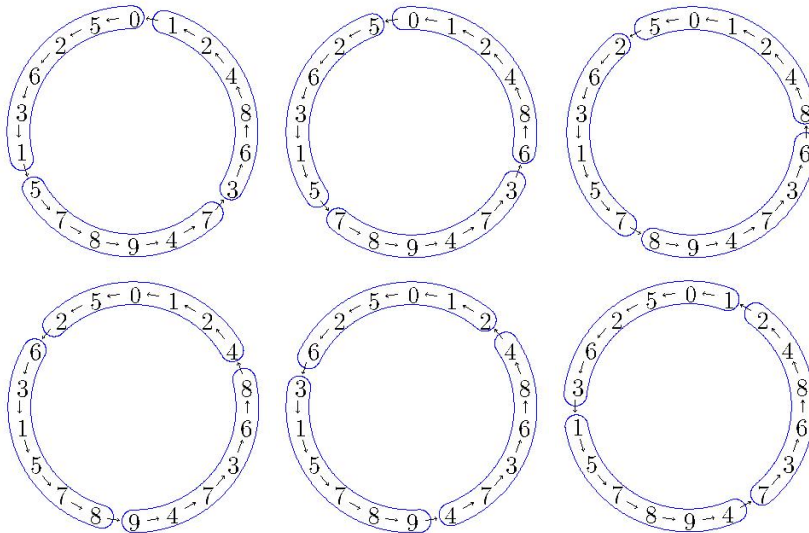
これは循環の長さが 18 で 循環の節が 052631578947368431 の循環小数である。

$18 = 2 \times 9 = 3 \times 6 = 6 \times 3$ である。



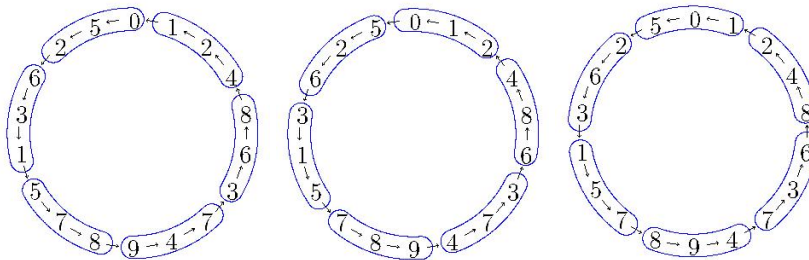
これも真正面の対角の和は9に成っていますね。

18個の循環する数を6桁ずつの3つの数とみてその和を計算しよう。



$$\begin{aligned}
 052631 + 578947 + 368421 &= 999999 \\
 526315 + 789473 + 684210 &= 1999998 \\
 263157 + 894736 + 842105 &= 1999998 \\
 631578 + 947368 + 421052 &= 1999998 \\
 315789 + 473684 + 210526 &= 999999 \\
 157894 + 736842 + 105263 &= 999999
 \end{aligned}$$

18個の循環する数を3桁ずつの6つの数とみてその和を計算しよう。

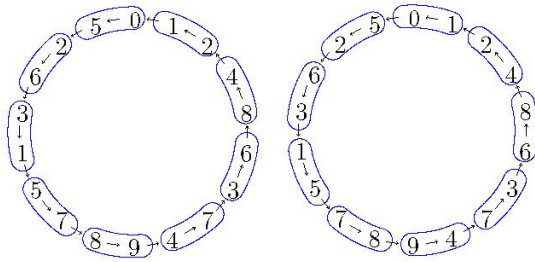


$$052 + 631 + 578 + 947 + 368 + 421 = 2997 = 3 \times 999$$

$$526 + 315 + 789 + 473 + 684 + 210 = 2997 = 3 \times 999$$

$$263 + 157 + 894 + 736 + 842 + 105 = 2997 = 3 \times 999$$

18 個の循環する数を 2 桁ずつの 9 つの数とみてその和を計算しよう。

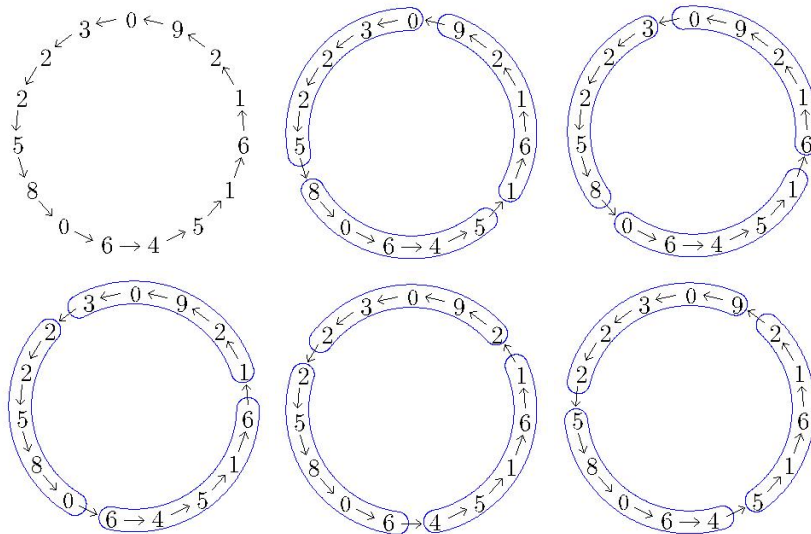


$$05 + 26 + 31 + 57 + 89 + 47 + 36 + 84 + 21 = 396 = 4 \times 99$$

$$52 + 63 + 15 + 78 + 94 + 73 + 68 + 42 + 10 = 495 = 5 \times 99$$

くどい様だがもう一つ例を与えよう。

$\frac{1}{31}$ は循環の長さが 15 で循環の節が 032258064516129 である。
 $15 = 3 \times 5 = 5 \times 3$ に注意しておこう。



15 個の循環する数を 5 桁ずつの 3 つの数とみてその和を計算しよう。

$$03225 + 80645 + 16129 = 99999$$

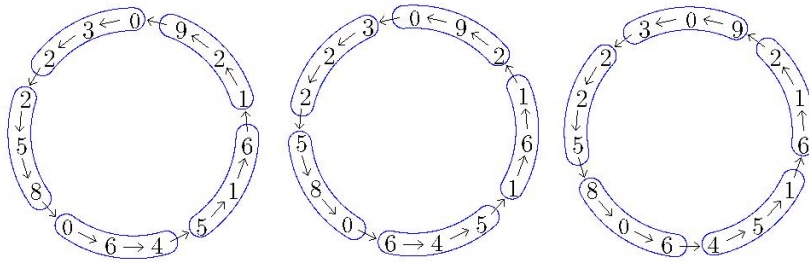
$$32258 + 06451 + 61290 = 99999$$

$$22580 + 64516 + 12903 = 99999$$

$$25806 + 45161 + 29032 = 99999$$

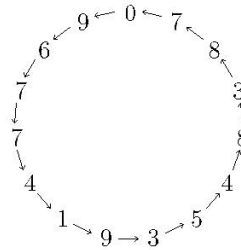
$$58064 + 51612 + 90322 = 199998 = 2 \times 99999$$

15 個の循環する数を 3 桁ずつの 5 つの数とみてその和を計算しよう。



$$\begin{aligned}
 032 + 258 + 064 + 516 + 126 &= 999 \\
 322 + 580 + 645 + 161 + 290 &= 1998 = 2 \times 999 \\
 225 + 806 + 451 + 612 + 903 &= 2997 = 3 \times 999
 \end{aligned}$$

$\frac{3}{31}$ は循環の長さが 15 で
 循環の節が 096774193548387 の
 循環小数である。
 $\frac{1}{31}$ のときと
 同じ様なことが起きています。



考察

今までは観察であったが、これからは理論的な考察をしていこう。

(工事中)