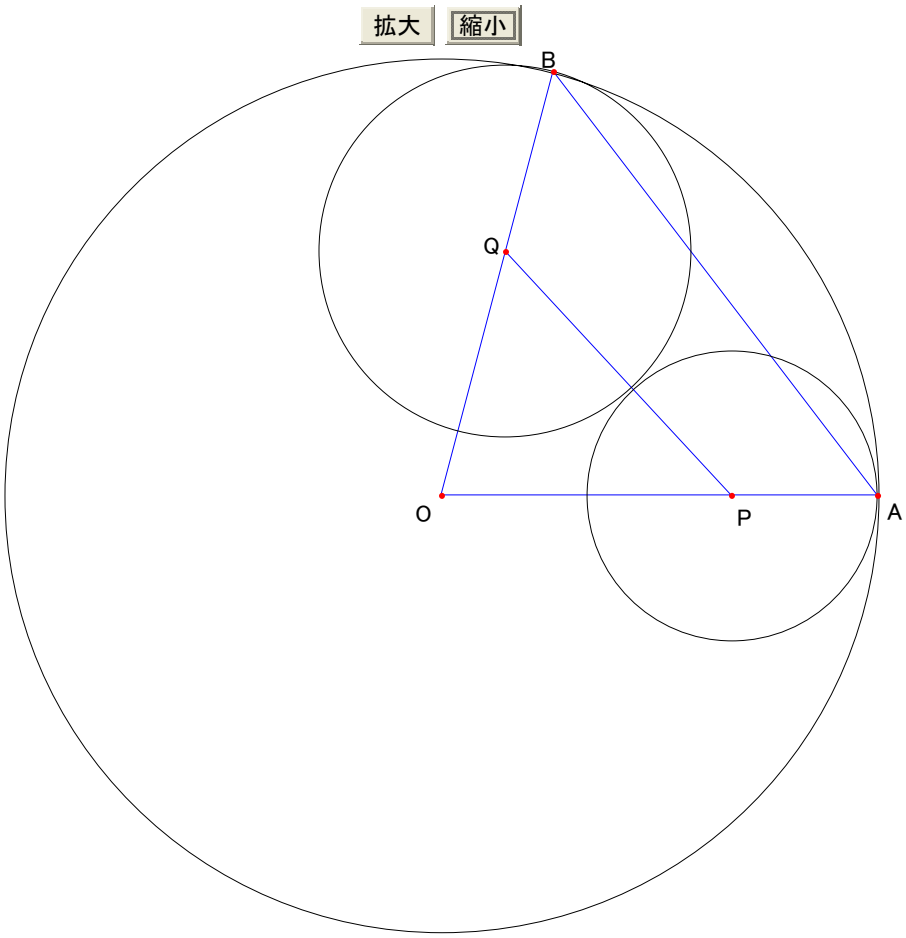
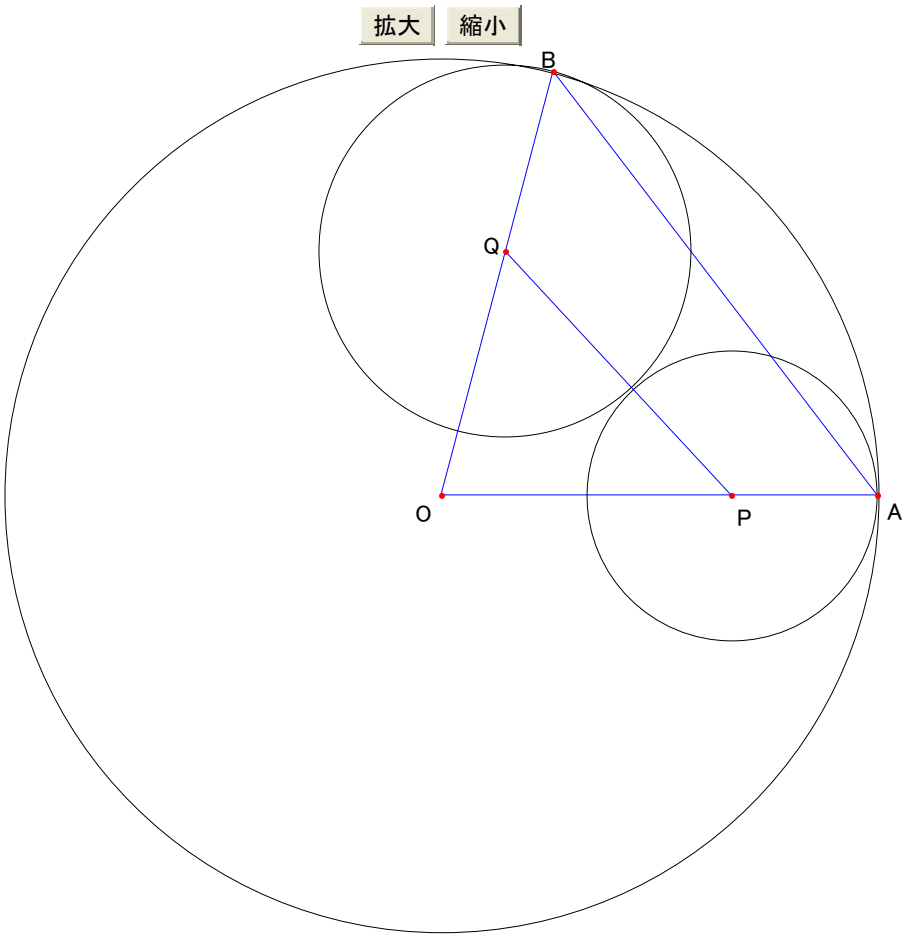


問題

O を中心とする大円の中に
P を中心としその円と
A で接している小円と
Q を中心としその円と
B で接している小円がある。
円 O, P, B の各々の半径を
1, a, b
とするとき

AB の長さを a, b で表せ



解答

OA = OB = 1, PA = a, QB = b, PQ = a+b
である。θ = ∠AOB とおくと

$$(a+b)^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2 - 2(1-a)(1-b)\cos\theta$$

なので

$$\cos\theta = (1-a-b-ab)/((1-a)(1-b))$$

従って

$$\begin{aligned} AB^2 &= 1 + 1 - 2\cos\theta \\ &= 4ab/((1-a)(1-b)) \end{aligned}$$

これより AB が求まる。