目 次

第1章　複素平面

1.1　複素数と複素平面

断らない限り, 虚数単位 $\sqrt{-1}$ を i であらわすことにする。
実数の組 a と b を使って $a+bi$ の形で表わされる数を複素数という。a,b,c,d を実数とするとき、二つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ は $a=c$ で $b=d$ が成り立つときのみ等しいと約束します。
$a+0i$ は単に a で表わし、この複素数を実数という。また $0+bi$ も単に bi で表わし、この形の複素数を純虚数という。
複素数全体のなす集合を $\mathbb{C}$ で表わす。 実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$ はこの意味で $\mathbb{C}$ の部分集合である。$\mathbb{R}$　は実数体と呼ばれ、$\mathbb{C}$ は複素数体と呼ばれる。
二つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ に対して、その和と積は次のように定義される。

$$\begin{cases} (a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{cases} \tag{1.1}$$

これらの定義の下次が成り立つ。

定理 1.1.1 次が成り立つ。

I (0) z と w を複素数とするとき
$z+w=w+z$ である
(1) z,v,w 複素数とするとき
$z+(v+w)=(z+v)+w$ である
(2) 0 は複素数であり、全ての複素数 z に対して
$z+0=z, 0+z=z$ である
(3) 全ての複素数 z に対して
$z+w=0$ かつ $w+z=0$
を満たす複素数 w が存在する。
(この w は z のマイナスと呼ばれ $-z$ で表わされる)

II (0) z と w を複素数とするとき
$zw=wz$ である
(1) z,v,w 複素数とするとき
$z(vw)=(zv)w$ である
(2) 1 は複素数であり、全ての複素数 z に対して
$z\times 1=z, 1\times z=z$ である
(3) 0 でない全ての複素数 z に対して
$zw=1$ かつ $wz=1$
を満たす複素数 w が存在する。
(この w は z の逆数と呼ばれ z^{-1}で表わされる)

III z,v,w 複素数とするとき
(1) $z(v+w)=zv+zw$
$(z+v)w=zw+vw$

確かめるだけなので、ここではこれの証明は省くことにしましょう。
a,b を実数とするとき
$-(a+bi)=(-a)+(-b)i$
であり
$a+bi\neq 0$ のとき

$$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i=\frac{a-bi}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{1.2}$$

である。

この定理 1.1.1 が成り立っているので、$\mathbb{C}$ は複素数体と「体」という呼称がつけられており、定理において複素数を全て実数に変えたものも成り立っているので $\mathbb{R}$ も実数体と 「体」という呼称がつけられている。

二つの複素数 z と w に対して
$z+(-w)$ を $z-w$ で表わし
$w\neq 0$ のとき zw^{-1}を$\dfrac{z}{w}$ で表わす。

定義 1.1.1 z を複素数とするとき、

$z = a + bi$ となる実数の組 a と b が唯一組存在するが、このとき

(1)　a を z の実部といい $Re(z)$ で表わす

(2)　b を z の虚部といい $Im(z)$ で表わす

(3)　$a - bi$ を z の共役といい $\overline{z}$ で表わす

この定義のもと、ただちに分かることだが、次の二つが成り立っている。

定理 1.1.2 z を複素数とするとき、次が成り立つ

(1)　$Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ である。

z が純虚数である為の必要十分条件は $\overline{z} = -z$ である

(2)　$Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ である。

z が実数である為の必要十分条件は $\overline{z} = z$ である

定理 1.1.3 z と w を複素数とするとき、次が成り立つ

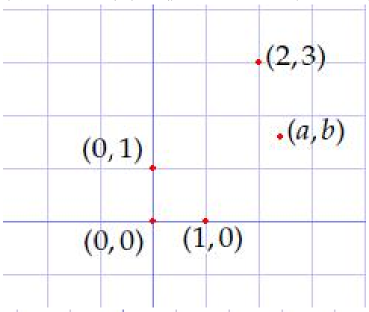
(1)　$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

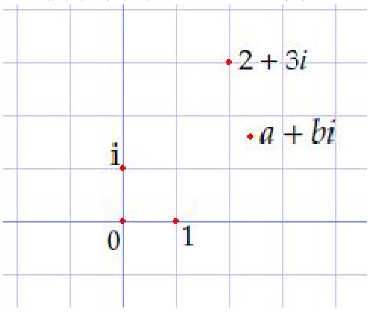
(2)　$\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$

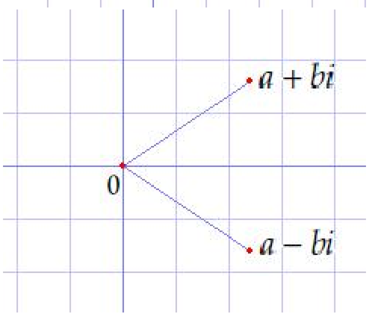
(3)　$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(4)　$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$　($w \neq 0$ のとき)

座標平面の点 (a, b) と複素数 $a + bi$ と同一視し、座標平面と複素数全体の集合と $\mathbb{C}$ と同一視したとき、この座標平面を複素平面又はガウス平面という。

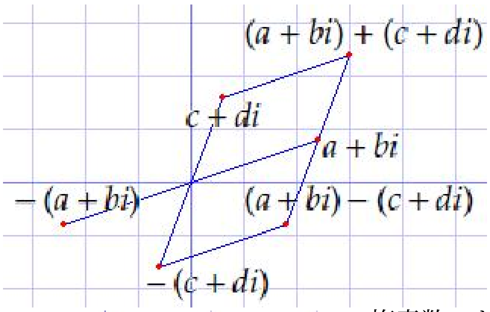




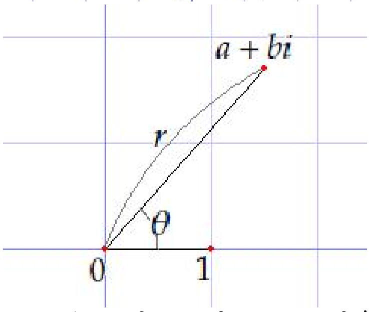


座標平面において x 軸にに相当する直線は複素数平面においては実数全体のなす集合になる。この直線を実軸という。また y 軸に相当する直線は純虚数全体のなす集合になる。この直線を純虚数軸という。

z を複素数とするとき $\overline{z}$ は複素数平面においては実軸にかんして z と線対称の位置にある。



z と w を複素数とするとき
複素数平面において
z と $-z$ は
0 に関して点対称である。
$0, z, z+w, w$ は平行四辺形をなす
$(z, z+w, w$ が 0 でないとき$)$



複素数 z を実数の組 a, b を用いて
　$z = a + bi$
と表わしたとき、$\sqrt{a^2+b^2}$ を z の絶対値あるいは長さといい $|z|$ で表わす。　これは座標平面において原点 $(0,0)$ と点 (a,b) との距離であり、複素平面では 0 と z との距離である。
$z\bar{z} = a^2 + b^2$ なので
$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ である。
　z が 0 でないとき、0 と 1 を結ぶ線分から反時計回りに 0 と z を結ぶ直線まで計った角度を θ とするとき、この *theta* を z の偏角という。z の偏角を $arg(z)$ で表わす。偏角は 2π $(360°)$ を法として定まる。普通代表値として 0 から 2π あるいは $-\pi$からπ $(0°$から $360°$ あるいは $-180°$から $180°)$ を用いる。
z が長さが r で偏角が θ の複素数とするとき

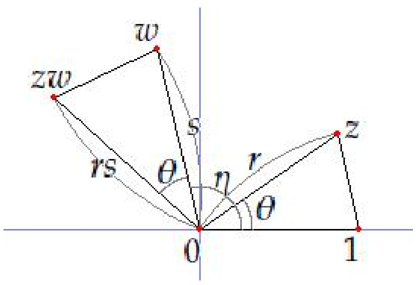
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.3}$$

である。　逆に r を正の実数とするとき $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ は長さが r で偏角 θ の複素数である。
次の三角関数の和の公式を思い起こそう

$$\begin{cases} \cos(\theta+\eta) = \cos\theta\cos\eta - \sin\theta\sin\eta \\ \sin(\theta+\eta) = \sin\theta\cos\eta + \sin\theta\cos\eta \end{cases} \tag{1.4}$$

これより、次の式を得る。

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))(s(\cos\eta + i\sin\eta)) = rs(\cos(\theta+\eta) + i\sin(\theta+\eta)) \tag{1.5}$$



このことは、二つの複素数を掛け算すると、長さが各々の長さの積で偏角が各々の偏角の和である複素数になることを意味している。
　以上を定理の形でまとめると次になる。

定理 1.1.4 z や w を 0 でない複素数とするとき、次が成り立つ

(1)　$r = |z|,\ \theta = arg(z)$ とするとき

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

(2)　$|zw| = |z||w|$

(3)　$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

系 1.1.5 z や w を 0 でない複素数とするとき、次が成り立つ

$0, 1, z, w, zw$ に対応する点を各々 O, A, B, C, D とするとき

$\triangle AOB$ と $\triangle COD$ とは相似である。

1.2　ド・モアブルの公式と１のｎ乗根

長さが r で偏角が θ の複素数と長さが s で偏角が η の複素数の積は式 (1.5) でみたように

$(r(\cos\theta + i\sin\theta))(s(\cos\eta + i\sin\eta)) = rs(\cos(\theta+\eta) + i\sin(\theta+\eta))$

となり、長さが rs で偏角が $\theta + \eta$ の複素数になる。

$r > 0$ で n が整数のとき、上の式より、次を得る。

$$\begin{cases} (r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta))(r(\cos\theta + i\sin\theta)) &= r^{n+1}(\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta) \\ (r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)(r^{-n}(\cos -n\theta + i\sin -n\theta) &= r^0(\cos 0\theta + i\sin 0\theta) = 1 \end{cases}$$

このことより、次の定理 (ド・モアブルの公式) を得る。

定理 1.2.1 *(ド・モアブル)*

$r > 0$ で $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき、全ての整数 n に対して

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

が成り立つ。

n を自然数として、$r = 1,\ \theta = \dfrac{2\pi}{n}$ として定理を適用すると

$(\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n})^n = 1$

を得る。つまり

$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$　とおくと $\alpha^n = 1$

が成り立つ。

更に m を整数とするとき

$\alpha^m = \cos\dfrac{2m\pi}{n} + i\sin\dfrac{2m\pi}{n}$　であり $(\alpha^m)^n = 1$

である。

$\alpha^0(=1), \alpha^1(=\alpha), \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$

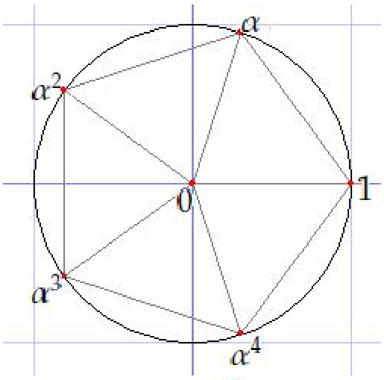
は異なる n 個の複素数であり、全て n 乗すると 1 になる。

よって次の定理を得る。

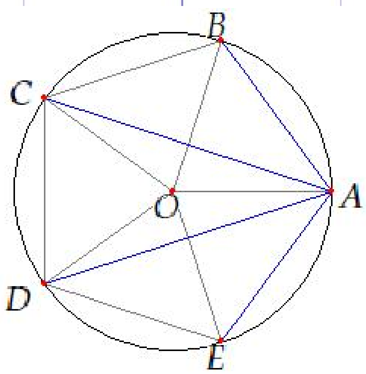
定理 1.2.2 *(1 の n 乗根)*
n を自然数とするとき、方程式 $z^n = 1$ の解は $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおくと
$\alpha^0(= 1), \alpha^1(= \alpha), \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$
である。

定理からただちに次の系を得る。

系 1.2.3 n を自然数とし $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ 　とおくと、次が成り立つ。
$z^n - 1 = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)\cdots(z-\alpha^{n-1})$



上の定理を図示すると次のようになる。
$\alpha^0(= 1), \alpha^1(= \alpha), \alpha^2, \cdots, \alpha^{n-1}$
は複素平面上で 0 を中心とし半径 1 の円に内接している正 n 角形の頂点をなしている。これらが、方程式 $z^n = 1$ の解の集合になっている。
　左は $n = 5$ のときの図である。



例題 1.2.1 五角形 *ABCDE* は半径 *1* の円に内接する正五角形とするこのとき
　$AB \times AC \times AD \times AE = 5$
であることを示せ

証明　正五角形の外接円が単位円、A に対応する複素数が 1 となるように座標をいれて複素平面で考えよう。$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくとき、B, C, D, E に対応する複素数は各々$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ である。よって

$$AB = |1-\alpha|, AC = |1-\alpha^2|, AD = |1-\alpha^3|, AE = |1-\alpha^4| \tag{1.6}$$

である。
系 1.2.3 より
　$z^5 - 1 = (z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)$
が成り立つ。
つまり $g(z) = (z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)$ とおくと
　$z^5 - 1 = (z-1)g(z)$

この式を z で微分して

$5z^4 = g(z) + (z-1)g'(z)$

これに $z = 1$ を代入して $5 = g(1)$ を得る。

よって、式 (1.6) より

$\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{AD}\times\mathrm{AE} = |\ g(1)\ |= g(1) = 5$

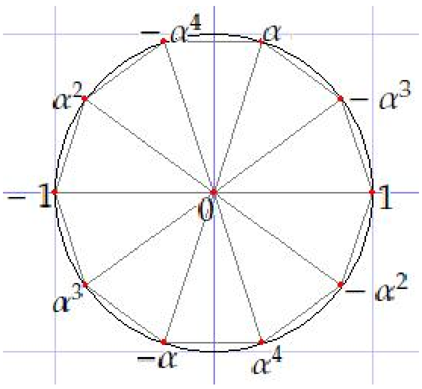
である。

次は、前の例題と全く同様にして示せるでしょう。

例題 1.2.2 半径 *1* の円に内接する正 n 角形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$ に対して

$A_0A_1\times A_0A_2\times\cdots\times A_0A_{n-1} = n$

であることを示せ。



例題 1.2.3 半径 *1* の円に内接する正１０角形の一辺の長さは

$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

である。

解答 $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくとき、単位円に内接する正５角形の頂点を図のように $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ ととり、間に $-\alpha^3, -\alpha^4, -1, -\alpha, -\alpha^2$ を挟んで単位円に内接する正１０角形の頂点を得る。

$\alpha^5 = 1$ なので $\alpha^4 = \alpha^{-1} = \overline{\alpha}$ であるので $\alpha + \alpha^4$ は実数である。よって $\alpha + \alpha^4 (= \alpha - (-\alpha^4))$ は単位円に内接する正１０角形の一辺の長さである。

$x = \alpha + \alpha^4$ とおくと $\alpha^5 = 1$ なので

$x^2 = 2 + \alpha^2 + \alpha^3$

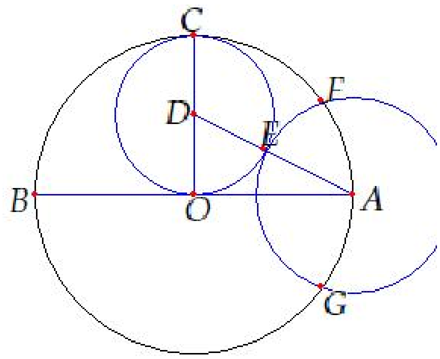
また $\alpha^5 = 1$ で $\alpha \neq 1$ なので $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$

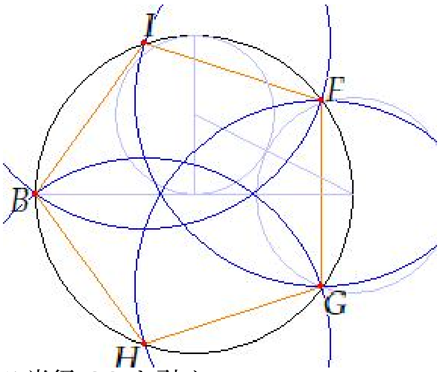
従って

$x^2 + x - 1 = 0$

$x > 0$ に注意して、この方程式をといて $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

円に内接する正５角形をコンパスと定規のみでは次のように作図できます。

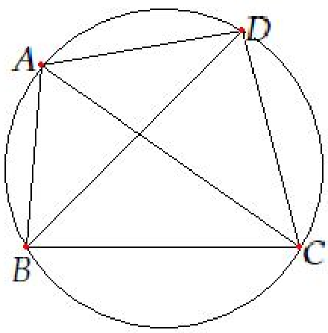




円 O の直径 AB を引き、AB に直交する半径 CO を引く。
CO の中点ををとり、それを D とする。
D を中心とし O を通る円と線分 DA との交点をとり、それを E とする。
円 O と A を中心とし E を通る円との交点を F と G とする。
図のように円 O 上に点 H, I を GH = GF = FI となるようにとる。
BH = HG, BI = IF であり、正 5 角形 BHGFI が作図できる。

1.3　トレミーの定理

初等幾何での証明も易しいのですが、複素平面での証明も綺麗な定理の一つにトレミーの定理があります。

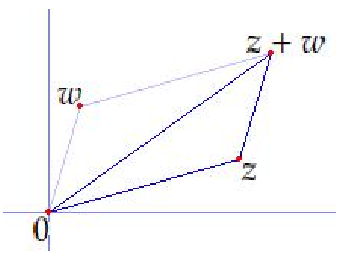


定理 1.3.1 *(トレミーの定理)*
四辺形 $ABCD$ において

$$AB \times CD + AD \times BC \leq AC \times BD \tag{1.7}$$

が成り立つ。
等号は 四辺形 $ABCD$ が円に内接しているとき、そのときのみ成り立つ。

証明には次の補題、三角形の二辺の和は他の一辺よりも大きい、を使います。

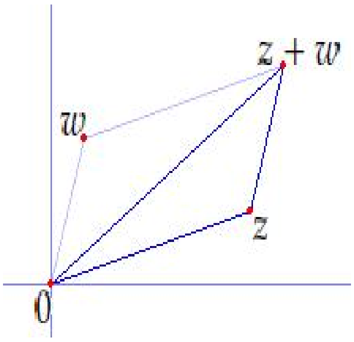


補題 1.3.2 z, w を複素数とするとき

$|z| + |w| \leq |z + w|$

が成り立つ。
等号は $arg(z) = arg(w)$ のときのみ成り立つ。

証明はしなくてもいいでしょう。



定理の証明　適当に座標をいれて複素平面で考えます。A, B, C, D に対応する複素数を a, b, c, d とおく。
$(a-b)(c-d)+(a-d)(b-c)=(a-c)(b-d)$
が成り立つので、補題より

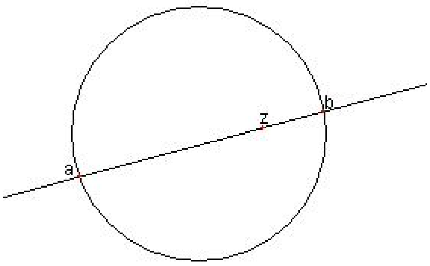
$$|(a-b)(c-d)|+|(a-d)(b-c)|\leq|(a-c)(b-d)| \tag{1.8}$$

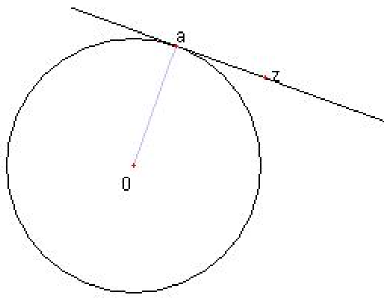
が成り立つ。等号は
$arg((a-b)(c-d)) = arg((a-d)(b-c))$ のときのみ成り立つ。
$arg((a-b)(c-d)) = arg((a-d)(b-c))$ が成り立つのは
$arg(\frac{c-d}{a-d}) = arg(\frac{-(c-b)}{a-b})$ が成り立つときつまり $\angle\mathrm{ADC} = 180^\circ - \angle\mathrm{ABC}$ が成り立つときのみ成り立つ。

式 (1.7) は式 (1.8) より成り立つことがわかり、等号が成り立つの、四辺形 ABCD が円に内接するときのみである。

1.4　単位円の幾何学

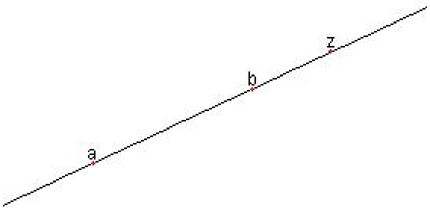
長さが 1 の複素数全体は原点を中心とする半径 1 の円をなす。この円を単位円という。幾何学の問題を解くのに複素数を使うと思いの他有効な場合がある例をもう幾つか紹介したところである。特に円に関係する場合、その円を単位円として解く解き方がまた有効であることをここに紹介しよう。





定理 1.4.1　a と b を単位円上の異なる 2 点とするとき
(1)　a と b を通る直線の方程式は
$z + ab\overline{z} = a + b$
である
(2)　a における単位円の接線の方程式は
$z + a^2\overline{z} = 2a$

である



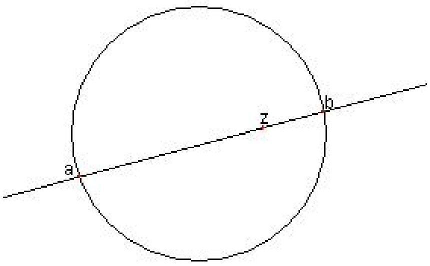
証明　(1)　一般に a と b を異なる複素数とするとき, 複素平面において、複素数 z が a と b を結ぶ直線上にある為の必要十分は $z-a$ が $b-a$ の実数倍であること、即ち $\frac{z-a}{b-a}$ が実数であることである。それは

$$\overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)} = \frac{z-a}{b-a} \tag{1.9}$$

が成り立つことである。式 (1) を変形して

$$\overline{(z-a)}(b-a) = (z-a)\overline{(b-a)} \tag{1.10}$$

を得る。
これが、複素平面における a と b を通る直線の方程式である。正直余り使い勝手が良いものとは思われない。

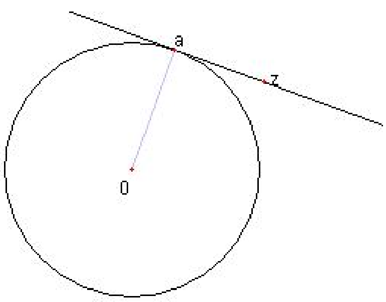


しかし、a と b が単位円上の複素数、つまり長さが 1 の複素数のときは $\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}$ なので (2) を変形して
$(\bar{z} - \frac{1}{a})(b-a) = (z-a)(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$
を得る。

両辺に $\frac{ab}{b-a}$ をかけて、整頓して

$$z + ab\bar{z} = a + b \tag{1.11}$$

を得る。

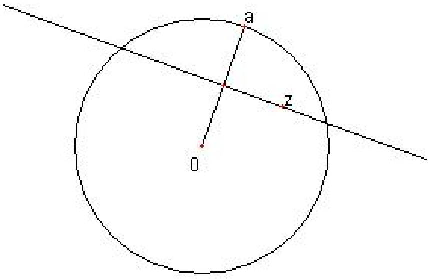


(2)　z が a における単位円の接線上にあるとき a と $z-a$ が直交しているので $\frac{z-a}{a}$ は純虚数である。つまり
$\overline{\left(\frac{z-a}{a}\right)} = -\frac{z-a}{a}$
なので
$\overline{(z-a)}a = -(z-a)\bar{a}$

a は長さが 1 なので $a\bar{a} = 1$。 上式の両辺に a をかけて、整頓して

$$z + a^2\bar{z} = 2a \tag{1.12}$$

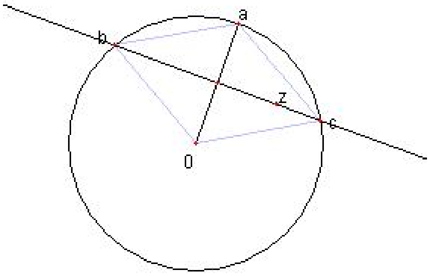
を得る。



系 1.4.2 a を単位円上の点とする。このとき 0 と a を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式は

$z + a^2\overline{z} = a$

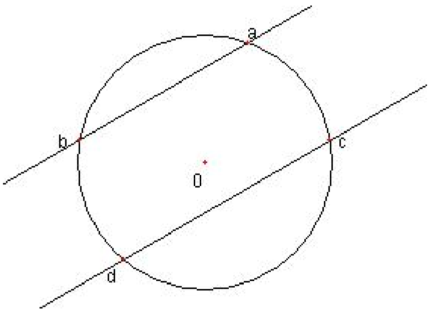
である。

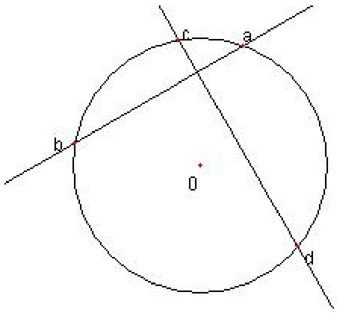


証明　0 と a を結ぶ線分の垂直二等分線と単位円との交点を b と c とおくと

¥¥¥ $bc = a^2, b + c = a$

なので定理の (1) より求める式を得る





定理 1.4.3　　a, b, c, d を単位円上の点で、a と b および c と d は異なるとする。
このとき

(1)　a と b を結ぶ直線と c と d を結ぶ直線が平行である条件は

$ab = cd$

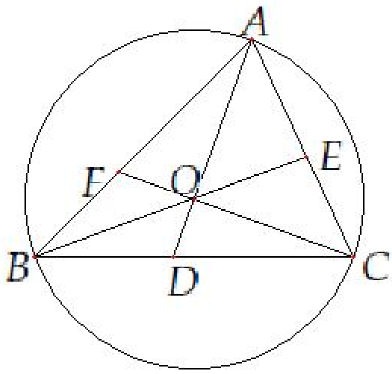
である。

(2)　a と b を結ぶ直線と c と d を結ぶ直線が直交する条件は

$ab + cd = 0$

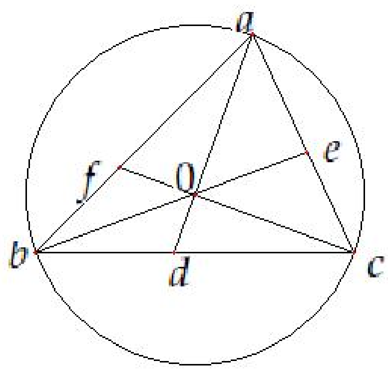
である。

略証明　$\dfrac{b-a}{d-c}$　が (1), (2) 各々の場合実数、純虚数であること、及び $\overline{a} = \dfrac{1}{a}, \overline{b} = \dfrac{1}{b}, \overline{c} = \dfrac{1}{c}, \overline{d} = \dfrac{1}{d}$
さらに $b - a \neq 0, d - c \neq 0$ を使って、求める結果を得る



例題 1.4.1 O を $\triangle ABC$ 外心とし
半直線 AO と BC との交点を D,
半直線 BO と CA との交点を E とし
半直線 CO と AB との交点を F とする。
R を $\triangle ABC$ の外接円の半径とするとき
次が成り立つ。

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} \tag{1.13}$$



証明　適当に座標をいれて △ABC の外接円が単位円となるようにして、複素平面で考える。A から F に対応する複素数を a から f で表わすことにする。
d が b と c を結ぶ直線上にあり、a と $-a$ を結ぶ直線上にあるので

$$\begin{cases} d + bc\overline{d} = b + c \\ d - a^2\overline{d} = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

これを解いて

$$d = \frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}$$

a と $a-d$ が同じ向きの複素数で a は長さが 1 なので

$$\mathrm{AD} = \frac{a-d}{a} = \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc}$$

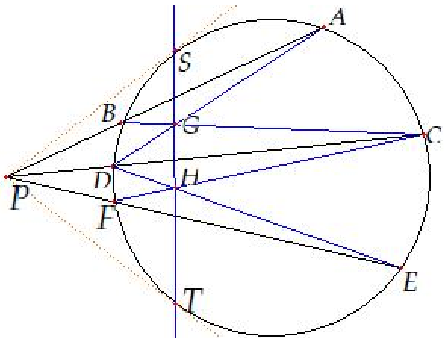
同様にして

$$\mathrm{BE} = \frac{(b-c)(b-a)}{b^2+ca}, \mathrm{CF} = \frac{(c-a)(c-b)}{c^2+ab}$$

よって

$$\frac{1}{\mathrm{AD}} + \frac{1}{\mathrm{BE}} + \frac{1}{\mathrm{CF}} = \frac{-(b-c)(a^2+bc)-(c-a)(b^2+ca)-(a-b)(c^2+ab)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 2$$

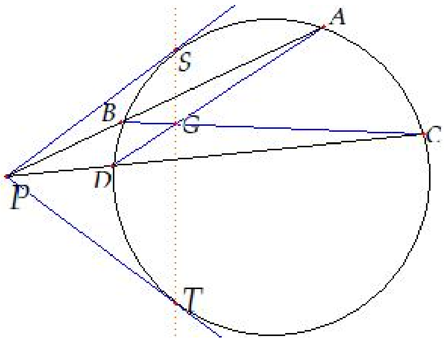
(R = 1 として証明が終わった)



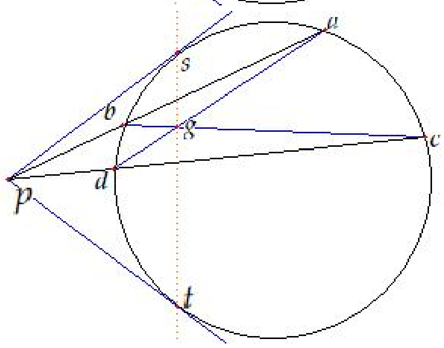
例題 1.4.2 円外の点 P から定規だけを使って円に接線を引こう。

図のように P から三本の割線
　AB, CD, EF を引く。
AD と BC の交点を G
CF と ED の交点を H とする。
直線 GH と円との交点を S と T とする。このとき
PS と PT は P から円に引いた接線になる。

この例題は次の例題を証明すれば正しいことが分かる。



例題 1.4.3 P を円外の点とし
S, T は P から円に引いた接線の接点とする。
AB, CD は P から引いた割線とし
G は AD と BC の交点とする。
このとき
S, G, T は同一直線上にある。



例題 1.4.3 **の証明** 適当に座標をいれて与えられた円が単位えん、P に対応する複素数が実数になるようにする。A, B, C, D, G, P, S, T に対応する複素数を各々a, b, c, d, g, p, s, t とする。s, g, t の実数部分が皆等しいことを示そう。示せればS, G, T は同一直線上にあることがわかる。

定理 1.4.1(直線の方程式) より p が実数であることも考慮して次を得る。

$$(1+s^2)p = 2s \tag{1.15}$$

$$\begin{cases} (1+ab)p = a+b \\ (1+cd)p = c+d \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\begin{cases} g+ad\overline{g} = a+d \\ g+bc\overline{g} = b+c \end{cases} \tag{1.17}$$

式 (1.15) より次を得る。

$$fracs+\bar{s}2 = fracs^2+12s = \frac{1}{p} \tag{1.18}$$

式 (1.17) より次を得る。

$$g = \frac{adb + adc - bca - bcd}{ad - bc}, \overline{g} = \frac{a + d - b - c}{ad - bc} \tag{1.19}$$

式 (1.19) と式 (1.16) を利用して

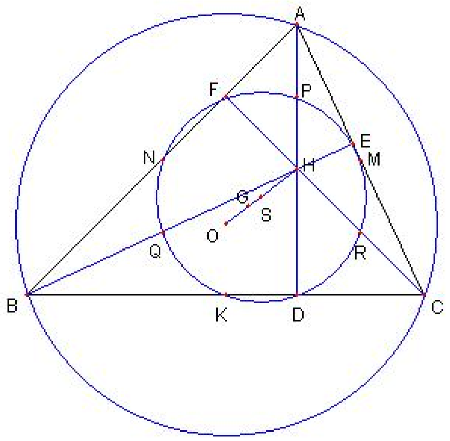
$$\begin{aligned} g + \overline{g} &= \frac{adb + adc - bca - bcd + a + d - b - c}{ad - bc} \\ &= \frac{(ab + 1)d + (cd + 1)a - (ab + 1)c - (cd + 1)b}{ad - bc} \\ &= \frac{(a + b)d + (c + d)a - (a + b)c - (c + d)b}{p(ad - bc)} = \frac{2}{p} \end{aligned}$$

この式と式 (**??** より $\frac{s + \overline{s}}{2} = \frac{g + \overline{g}}{2}$ を得る。同様に $\frac{t + \overline{t}}{2} = \frac{g + \overline{g}}{2}$ を得る。

第2章　単位円の幾何の応用

2.1　９点円の定理

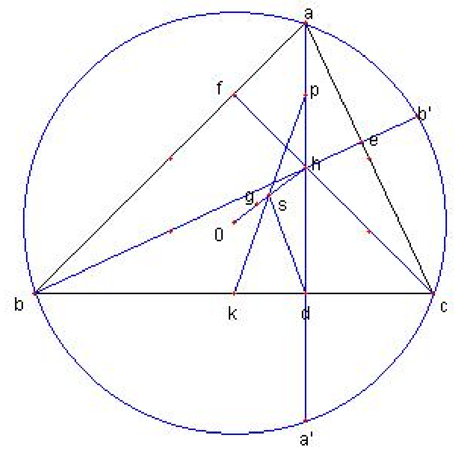
△ABC が与えられたとき。△ABC の外心を O, 垂心を H そして重心を G とする。このとき G は OH を 1 : 2 に内分する点であることが知られている。また OH の中点が △ABC の９点円の中心であることが平面幾何学の定理として知られている。　ここでは、この結果を単位円の幾何学を使って示すことにしよう。



定理 2.1.1（９点円の定理）　O を $\triangle ABC$ の外心、 H を $\triangle ABC$ の垂心とする。
頂点 A, B, C から各々対辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足を D, E, F とする。
辺 BC, CA, AB の中点を各々 K, M, N とする。
また線分 AH, BH, CH の中点を各々 P, Q, R とする。
このとき９点 $D, E, F, K, M, N, P, Q, R$ は同一円周上にある。

この円を △ABC の９点円というが、この円は OH の中点を中心に持ち、半径は △ABC の外接円の半径の $\frac{1}{2}$ である

証明　S を OH の中点とする。 $\mathrm{SD} = \mathrm{SK} = \mathrm{KP} = \dfrac{\mathrm{OA}}{2}$ を示せば良いでしょう。（同様にして残りの $\mathrm{SE} = \mathrm{SM} = \mathrm{SQ} = \mathrm{SF} = \mathrm{SN} = \mathrm{SR} = \dfrac{\mathrm{OA}}{2}$ も示せる。）



適当に座標をいれて △ABC の外接円が単位円となるようにして、複素平面で考えよう。 A, B, C, D, E, F, G, H, S, K, P に対応する複素数を各々$a, b, c, d, e, f, g, h, s, k, m, n, p$ とおく。AD の延長と単位円との交点に対応する複素数を a' とし、BE の延長と単位円との交点に対応する複素数を b' とする
a と a' を結ぶ直線と b と b' を結ぶ直線が直交しているので

$$\begin{cases} aa' + bc = 0 \\ bb' + ca = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

h が a と a' を結ぶ直線上にあり、b と b' を結ぶ直線上にあるので

$$\begin{cases} h + aa'\overline{h} = a + a' \\ h + bb'\overline{h} = b + b' \end{cases} \tag{2.2}$$

が成り立つ。　これより

$$\begin{cases} ah + a^2a'\overline{h} = a^2 + aa' \\ bh + b^2b'\overline{h} = b^2 + bb' \end{cases} \tag{2.3}$$

を得る。　変形して

$$\begin{cases} ah - abc\overline{h} = a^2 - bc \\ bh - abc\overline{h} = b^2 - ca \end{cases} \tag{2.4}$$

これより

$$(a-b)h = (a-b)(a+b+c) \tag{2.5}$$

を得る。$a - b \neq 0$ なので

$$h = a + b + c \tag{2.6}$$

S は OH の中点なので $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ である。
d が a と a' を結ぶ直線上にあり、b と c を結ぶ直線上にあるので

$$\begin{cases} d + aa'\overline{d} = a + a' \\ d + bc\overline{d} = b + c \end{cases} \tag{2.7}$$

である。 $aa' + bc = 0$ なので

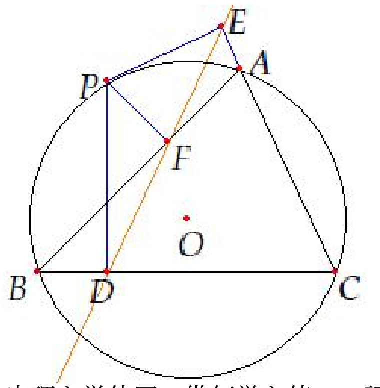
$$d = \frac{a+b+c+a'}{2} \tag{2.8}$$

を得る。
K は BC の中点なので $k = \dfrac{b+c}{2}$。P は AH の中点なので $p = \dfrac{a+h}{2}$。よって

$$\begin{cases} |d-s| = |\dfrac{a'}{2}| = \dfrac{1}{2} \\ |k-s| = |\dfrac{-a}{2}| = \dfrac{1}{2} \\ |p-s| = |\dfrac{a}{2}| = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{2.9}$$

を得る。これは $\mathrm{SD} = \mathrm{SK} = \mathrm{KP} = \dfrac{\mathrm{OA}}{2}$ を示している。
$h = a+b+c, g = \dfrac{a+b+c}{3}, s = \dfrac{a+b+c}{2}$ だったので G は OH を 1 : 2 に内分する点であり、S は OH の中点である。

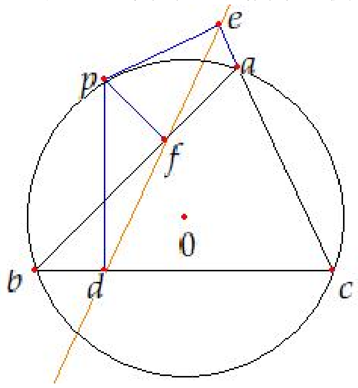
2.2 シムソンの定理



定理 2.2.1 (シムソンの定理)
$\triangle ABC$ の外接円上の点 P から
辺 BC, CA, AB 各々に引いた垂線の足を
各々 D, E, F とおくとき
D, E, F は一直線上にある

この直線を P に対する
シムソン線という。

この定理を単位円の幾何学を使って証明しよう。



$\triangle$ABC の外接円が単位円となるように座標を入れて複素平面で考える。A, B, C, D, E, F, P 各々に対応する複素数をそれぞれ a, b, c, d, e, f, p とおく。p と d を結ぶ直線が再び単位円と交わる複素数を d' とおく。 定理 1.4.1(直線の方程式) 及び定理 1.4.3(平行垂直) より次の式を得る。

$$\begin{cases} d + bc\overline{d} = b + c \\ d + pd'\overline{d} = p + d' \\ bc + pd' = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

従って $d' = \dfrac{-bc}{p}$ であり $d = \dfrac{p+b+c-\dfrac{bc}{p}}{2}$ である。
同様にして e, f も求めて、まとめて、次のようになる。

$$d = \frac{p+b+c-\dfrac{bc}{p}}{2},\ e = \frac{p+c+a-\dfrac{ca}{p}}{2},\ f = \frac{p+a+b-\dfrac{ab}{p}}{2} \tag{2.11}$$

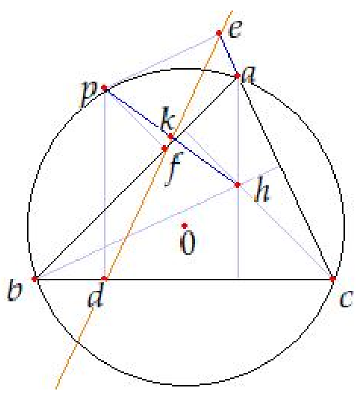
よって

$$e-d = \frac{(a-b)(p-c)}{2p},\ f-d = \frac{(a-c)(p-b)}{2p} \tag{2.12}$$

である。

$$\overline{\left(\frac{f-d}{e-d}\right)} = \overline{\left(\frac{(a-c)(p-b)}{(a-b)(p-c)}\right)} = \frac{(\frac{1}{a}-\frac{1}{c})(\frac{1}{p}-\frac{1}{b})}{(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})(\frac{1}{p}-\frac{1}{c})} = \frac{(a-c)(p-b)}{(a-b)(p-c)} = \frac{f-d}{e-d}$$

従って $\dfrac{f-d}{e-d}$ は実数であり、d, e, f が同一直線上にあることがわかる
次の定理はシムソンの定理の発展である。



定理 2.2.2 *(シムソンの定理の発展)*
今までの記号の下
$\triangle ABC$ の垂心を H とおくと
P に対するシムソン線は
線分 PH の中点を通る

証明　定理 2.2.1(シムソンの定理) の証明での記号をそのまま使う。H に対応する複素数を h で表わすことにする。
定理 2.1.1(9 点円の定理) の証明ところ (式 (2.8) 参照) で示したように

$h = a + b + c$ である。PH の中点に対応する複素数を k であらわすと、$k = \dfrac{p+a+b+c}{2}$ となるので、式 (**??**) より次を得る。

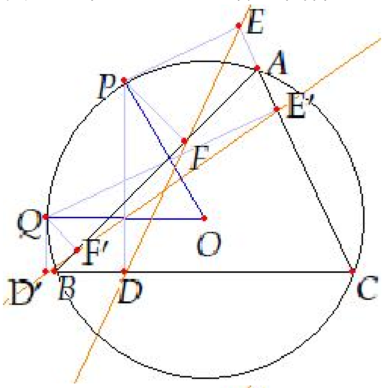
$$k-d = \frac{ap+bc}{2p},\ k-e = \frac{bp+ca}{2p},\ k-f = \frac{cp+ab}{2p} \tag{2.13}$$

a, b, c, p が長さが 1 の複素数であることに注意して、次を得る。

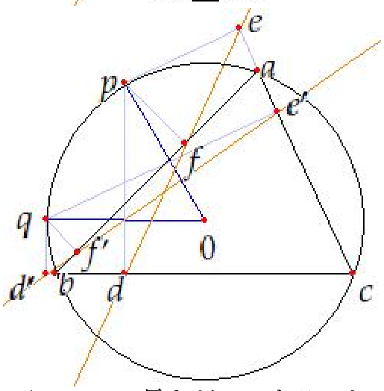
$$\overline{k-d} = \frac{ap+bc}{2abc},\ \overline{k-e} = \frac{bp+ca}{2abc},\ \overline{k-f} = \frac{cp+ab}{2abc} \tag{2.14}$$

式 (2.13),(2.15) は $0, k-d, k-e, k-f$ が一直線上にあることを、即ち d, e, f, k が一直線上にあることを示している。

次に 2 本のシムソン線の関係をのべる定理を紹介しよう。



定理 2.2.3（2 本のシムソン線）
P, Q を $\triangle ABC$ の外接円の異なる 2 点とする。このとき P に対するシムソン線と Q に対するシムソン線は $\angle POQ$ の半分の角度で交わる。



証明　今までの記号を使うことにする。また Q に対応する複素数を q で表わし Q から BC, CA, AB に下ろした垂線の足に対応する複素数を各々 d', e', f' で表わすことにする。式 (2.12) で求めたようにように

$$\begin{cases} e-d = \dfrac{(a-b)(p-c)}{2p} \\ e'-d' = \dfrac{(a-b)(q-c)}{2q} \end{cases} \tag{2.15}$$

a, b, c, p, q の長さが 1 であることに注意して、共役をとって、次を得る。
α を長さが 1 で偏角が $arg(\dfrac{q-c}{p-c})$ に等しい複素数とする。このとき $q - c = \alpha t(p-c)$ となる実数 t が存在する。後の補題 (補題 2.2.4) で示すように $q = \alpha^2 p$ である。

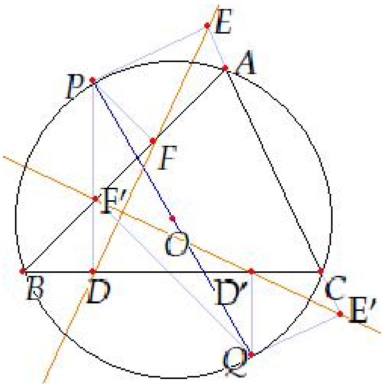
$$\frac{e-d}{\alpha(e'-d')} = \frac{q(p-c)}{\alpha p(q-c)} = \frac{\alpha^2 p(p-c)}{\alpha p \alpha t(p-c)} = \frac{1}{t}$$

t が実数なので $arg(e-d) = arg(\alpha) + arg(e'-d')$ を得て、求める結果を得る。

補題 2.2.4　α, c、p、q が長さが 1 の複素数で t が 0 でない実数とする。また $q - c \neq 0$ とする。このとき
　$q - c = \alpha t(p-c)$ が 成り立てば $q = \alpha^2 p$ である。

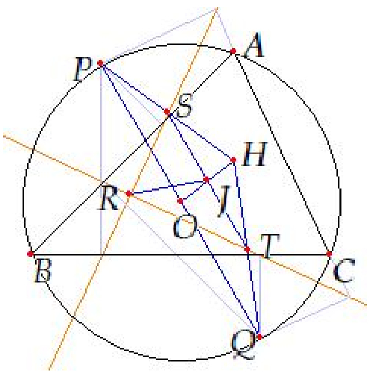
証明　α, c、p、q が長さが 1 で t が実数なので $q - c = \alpha t(p-c)$ の共役をとって

$$\frac{-(q-c)}{qc}=\frac{-t(p-c)}{\alpha pc}$$
この式と $q-c=\alpha t(p-c)$ より $q=\alpha^2$ をえる。
(本当は中心角と円周角との関係からわかるのですが)



系 2.2.5
PQ を △*ABC* の外接円の直径とするとき
P に対するシムソン線と
Q に対するシムソン線は直交し
その交点は △*ABC* の 9 点円上にある。

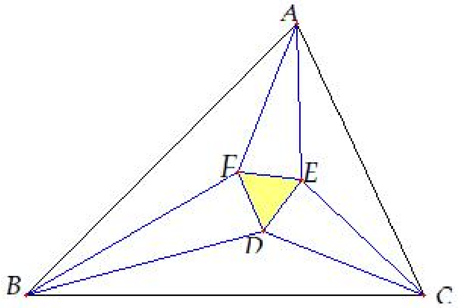
証明　定理 *2.2.3(* 2 本のシムソン線*)* よりこの 2 本のシムソン線が直交していることが分かる。交点が △*ABC* の 9 点円上にあることを示すのに定理 *2.2.2(*シムソンの定理の発展*)* を使うことにする。



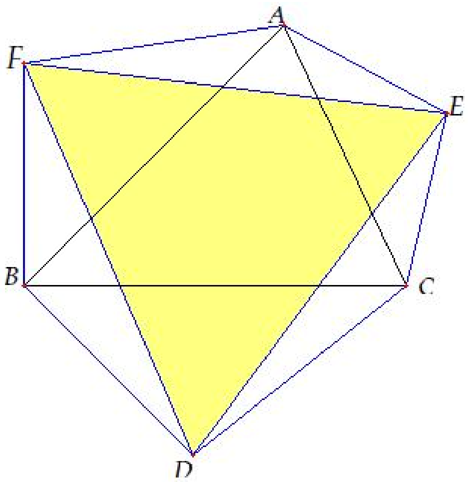
J を 2 本のシムソン線の交点とし
H を △ABC の垂心とする
S を P に対するシムソン線と PH との交点、T を Q に対するシムソン線と QH との交点、J を ST と HO との交点とするとき、
S, T は各々 PH, QH の中点であり
J は OH の中点である。
また O が PQ の中点なので J は ST の中点である。

△ABC の 9 点円は OH の中点を中心にしその半径は △ABC の外接円の半径の $\frac{1}{2}$ である（定理 2.1.1(9 点円の定理) 参照）。J が OH の中点なので J は △ABC の 9 点円の中心である。
S, T は各々 PH, QH の中点なので $\mathrm{ST}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}$
$\angle\mathrm{SRT}=90^\circ$ で J が ST の中点なので $\mathrm{JR}=\mathrm{JS}=\frac{1}{2}\mathrm{OP}$
よって R は △ABC の 9 点円上にある。(初等幾何での証明になりました)

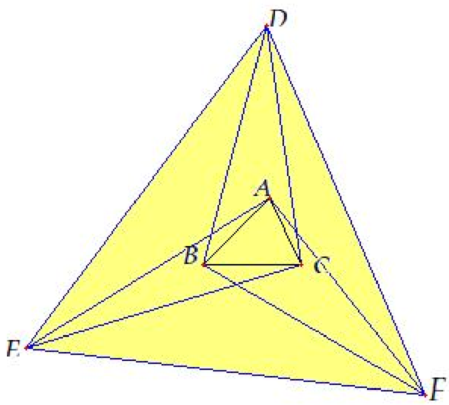
2.3　モーレの定理



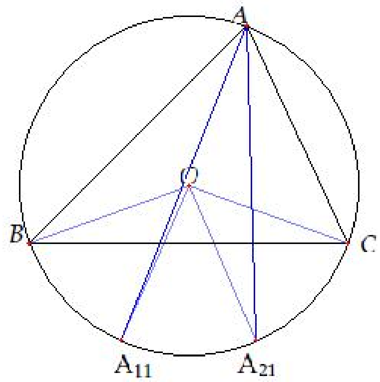
定理 2.3.1 *(モーレの定理)*
図のように $\triangle ABC$ の各頂角の三等分線の内側同士の交点を各々D, E, F とおくとき
　$\triangle DEF$ は正三角形をなす。



定理 2.3.2 *(モーレの定理 (外角))*
図のように $\triangle ABC$ の各頂角の外角三等分線の内側同士の交点を各々 D, E, F とおくとき
　$\triangle DEF$ は正三角形をなす。



次の図は今までと密接に関係した図である。
この節では、二つの定理の証明を与え、三つの図の関連を紹介しよう。



O を △ABC の外心とする。△ABC の外接円の孤 BC 上に図のように点 A_{11}, A_{21} を

$\angle BOA_{11} = \angle A_{11}OA_{21} = \angle A_{21}OAC$

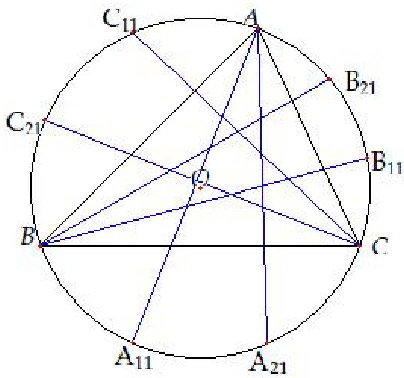
となるように取る。

AA_{11} と AA_{21} は ∠ BAC の三等分線になっている。

同様に △ABC の外接円上に点 $B_{11}, B_{21}, C_{11}, C_{21}$ を

BB_{11} と BB_{21} が ∠ CBA の三等分線になり

CC_{11} と CC_{21} が ∠ ACB の三等分線になるようにとる



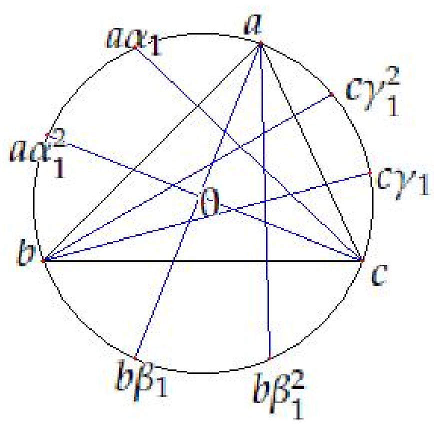
定理 2.3.1(モーレの定理) は

BB_{11} と CC_{21} との交点

CC_{11} と AA_{21} との交点

AA_{11} と BB_{21} との交点

この三点が正三角形をなすことを主張している。



△ABC の外接円が単位円となるように座標を入れ、A, B, C に対応する複素数を各々 a, b, c とする。

長さが 1 で偏角が各々 ∠ AOA_{11}、∠ BOB_{11}、∠ COC_{11} の複素数を各々

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

とすると

$C_{11}, C_{21}, A_{11}, A_{21}, B_{11}, B_{21}$ に対応する複素数は各々

$a\alpha_1, a\alpha_1^2, b\beta_1, b\beta_1^2, c\gamma_1, c\gamma_1^2$

である。

ここでは断らない限り ω は長さが 1 で偏角が 120° の複素数とする。つまり $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。ω は

$\omega^3 = 1$ で $1 + \omega + \omega^2 = 0$

を満たしている。

前述の　$a, b, c, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ は長さが 1 の複素数で次を満たしている。

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \omega,\ b = a\alpha_1^3, c = b\beta_1^3, a = c\gamma_1^3 \tag{2.16}$$

定理の証明のために次の補題を用意しておく。

補題 2.3.3 *a, b, c は長さが 1 の異なる複素数として、α, β, γ は長さが 1 の複素数で次が成り立っているとする。*
(*)　$\alpha\beta\gamma = \omega, b = a\alpha^3, c = b\beta^3, a = c\gamma^3$
b と $c\gamma$ を結ぶ直線と c と $a\alpha^2$ を結ぶ直線との交点に対応する複素数を d,
c と $a\alpha$ を結ぶ直線と a と $b\beta^2$ を結ぶ直線との交点に対応する複素数を e,
a と $b\beta$ を結ぶ直線と b と $c\gamma^2$ を結ぶ直線との交点に対応する複素数を f とする。このとき、次が成り立っている。
(1)　$d = b(\beta^3\gamma + \beta^2\gamma\omega + \beta\gamma\omega^2 - \beta\omega^2 - \beta^2\omega)$
(2)　$d + e\omega + f\omega^2 = 0$
(3) $d = e = f$ でないときは、d, e, f は反時計回りに正三角形をなす。

証明　d が b と $c\gamma$ を結ぶ直線と c と $a\alpha^2$ を結ぶ直線上にあるので

$$\begin{cases} d + bc\gamma\overline{d} = b + c\gamma \\ d + ca\alpha^2\overline{d} = c + a\alpha^2 \end{cases} \tag{2.17}$$

$c = b\beta^3, a = c\gamma^3 = b\beta^3\gamma^3$ なので上の式は次になる。

$$\begin{cases} d + bc\gamma\overline{d} = b + b\beta^3\gamma \\ d + bc\alpha^2\beta^3\gamma^3\overline{d} = b\beta^3 + b\alpha^2\beta^3\gamma^3 \end{cases} \tag{2.18}$$

$\alpha\beta\gamma = \omega$ に考慮して一番目の式より二番目の式 $\times\alpha\gamma$ を引いたものを計算して

$$(1 - \alpha\gamma)d = b(1 + \beta^3\gamma - \beta^2\omega - \gamma) \tag{2.19}$$

$1 - \beta^2\omega = \alpha^2\beta^2\gamma^2\omega - \beta^2\omega = (\alpha^2\gamma^2 - 1)\beta^2\omega = (\alpha\gamma - 1)(\alpha\gamma + 1)\beta^2\omega$
　$= -(1 - \alpha\gamma)(\beta\omega^2 + \beta^2\omega)$
$\beta^3\gamma - \gamma = (\beta^3 - \alpha^3\beta^3\gamma^3)\gamma = (1 - \alpha\gamma)(1 + \alpha\gamma + \alpha^2\gamma^2)\beta^3\gamma$
　$= (1 - \alpha\gamma)(\beta^3\gamma + \beta^2\gamma\omega + \beta\gamma\omega^2)$
であるので、式 (2.19) より次を得る。(もし $1 - \alpha\gamma = 0$ とすると $\beta = \omega$ となり $c = b$ を得る。これは矛盾)

$$d = b(\beta^3\gamma + \beta^2\gamma\omega + \beta\gamma\omega^2 - \beta\omega^2 - \beta^2\omega) \tag{2.20}$$

これで、補題の (1) が示せた。
式 (2.20) に $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a, \alpha \longrightarrow \beta \longrightarrow \gamma \longrightarrow \alpha$ の置換を施して e を求める。

$e = c(\gamma^3\alpha + \gamma^2\alpha\omega + \gamma\alpha\omega^2 - \gamma\omega^2 - \gamma^2\omega)$

よって

$e\omega = b\beta^3(\gamma^3\alpha + \gamma^2\alpha\omega + \gamma\alpha\omega^2 - \gamma\omega^2 - \gamma^2\omega)\omega$

$= b(\beta^2\gamma^2\omega^2 + \beta^2\gamma + \beta^2\omega - \beta^3\gamma - \beta^3\gamma^2\omega^2)$

この式に再び $\alpha \longrightarrow \beta \longrightarrow \gamma \longrightarrow \alpha$ の置換を施して $f\omega$ を求める。

$f\omega = c(\gamma^2\alpha^2\omega^2 + \gamma^2\alpha + \gamma^2\omega - \gamma^3\alpha - \gamma^3\alpha^2\omega^2)$

よって

$f\omega^2 = b\beta^3(\gamma^2\alpha^2\omega^2 + \gamma^2\alpha + \gamma^2\omega - \gamma^3\alpha - \gamma^3\alpha^2\omega^2)\omega$

$= b(\beta\omega^2 + \beta^2\gamma\omega^2 + \beta^3\gamma^2\omega^2 - \beta^2\gamma^2\omega^2 - \beta\gamma\omega^2)$

今までの計算結果を式 (2.20) も含めて再び書くと次のようになる。

$$\begin{cases} d = b(\beta^3\gamma + \beta^2\gamma\omega + \beta\gamma\omega^2 - \beta\omega^2 - \beta^2\omega) \\ e\omega = b(\beta^2\gamma^2\omega^2 + \beta^2\gamma + \beta^2\omega - \beta^3\gamma - \beta^3\gamma^2\omega^2) \\ f\omega^2 = b(\beta\omega^2 + \beta^2\gamma\omega^2 + \beta^3\gamma^2\omega^2 - \beta^2\gamma^2\omega^2 - \beta\gamma\omega^2) \end{cases} \tag{2.21}$$

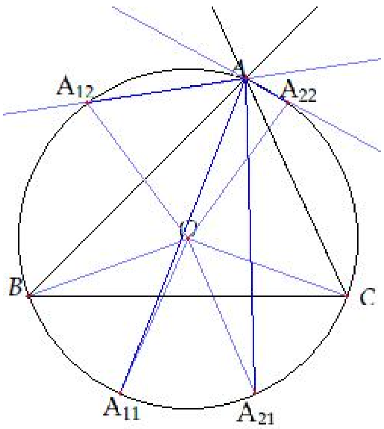
$\beta^2\gamma(1+\omega+\omega^2) = 0$ に注意して $d + e\omega + f\omega = 0$ を得る。 これで補題の (2) が示せた。

補題の (3) は補題の (2) と定理**??**(正三角形条件) より得られる。

定理 2.3.1(**モーレの定理**) **の証明**　式 (2.16) で示したように

$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \omega,\ b = a\alpha_1^3, c = b\beta_1^3, a = c\gamma_1^3$

だったので, $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$ として補題 2.3.3 を適用して、定理 2.3.1 が示される。



O を中心にして A_{11} を時計回りに 120° 回転して得られる点を A_{12} とし、O を中心にして A_{21} を半時計回りに 120° 回転して得られる点を A_{22} とおく。このとき 直線 AA_{12} と AA_{22} が $\angle BAC$ の外角の 3 等分線になっている。(ここで $A = A_{12}$ のときは直線 AA_{12} で A における $\triangle ABC$ の外接円の接線を表わすことにします。直線 AA_{12} も同様です) A_{12}, A_{22} に対応する複素数は $b\beta_1\omega^2, b\beta_1^2\omega$ である。$\beta_1^2\omega = (\beta_1\omega^2)^2$ に注意しておこう

同様にして

O を中心にして B_{11} を時計回りに 120° 回転して得られる点を B_{12} とし、

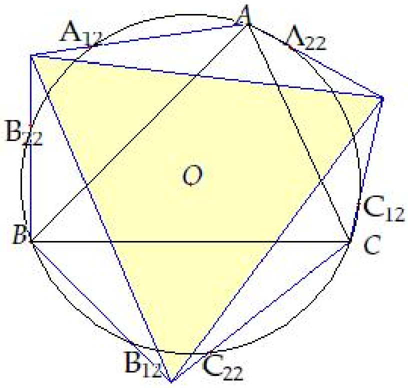
O を中心にして B_{21} を半時計回りに 120° 回転して得られる点を B_{22} とおく。

O を中心にして C_{11} を時計回りに 120° 回転して得られる点を C_{12} とし、

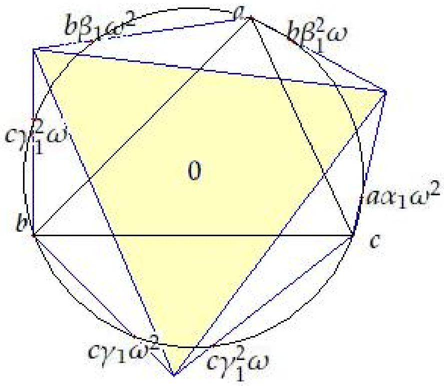
O を中心にして C_{21} を半時計回りに 120° 回転して得られる点を C_{22} とおく。

このとき 直線 BB_{12} と BB_{22} は $\angle CBA$ の外角の 3 等分線であり、直線 CC_{12} と CC_{22} は $\angle ACB$ の外角の 3 等分線である。

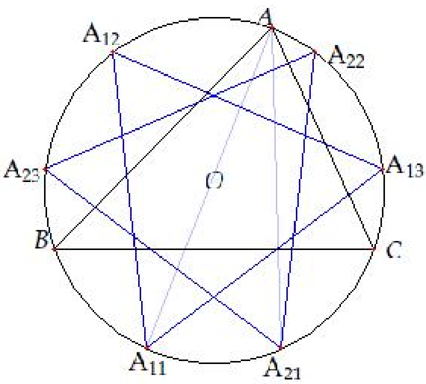
$B_{12}, B_{12}, C_{12}, C_{12}$ に対応する複素数は各々$c\gamma_1\omega^2, c\gamma_1^2\omega, a\alpha_1\omega^2, a\alpha_1^2\omega$ である。



BB_{12} と CC_{22} との交点
CC_{12} と AA_{22} との交点
AA_{12} と BB_{22} との交点
この三点が正三角形をなすことを示そう。
これが示されたら、
定理 2.3.2(モーレの定理 (外角)) が
示されたことになる。

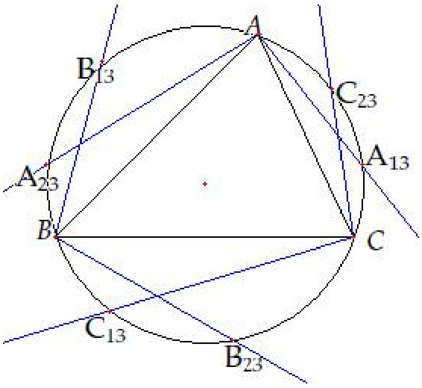


$\alpha = \alpha_1\omega^2, \beta = \beta_1\omega^2, \gamma = \gamma_1\omega^2$ とおくと、式 (2.16) は $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ が補題 2.3.3 での条件 (*) が成り立つことを保証しているので、補題 2.3.3 をこの場合に適用して、定理 2.3.2(モーレの定理 (外角)) を得る。

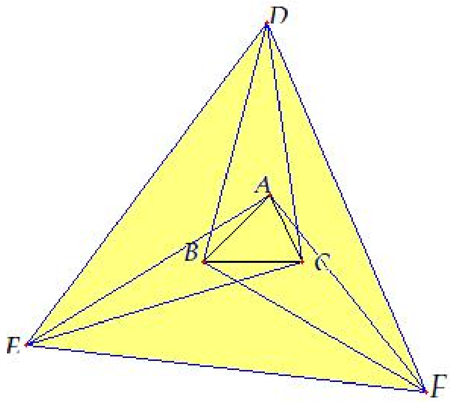


A_{11} を O を中心にして反時計回りに 120° 回転して得られる点を A_{13} とし、A_{21} を O を中心にして時計回りに 120° 回転して得られる点を A_{23} とする。図のように $\triangle A_{11}A_{13}A_{12}$ 及び $\triangle A_{21}A_{22}A_{23}$ は反時計回りに正三角形をなし $\triangle ABC$ の外接円に内接している。
A_{13}, A_{23} に対応する複素数は各々 $b\beta_1\omega, b\beta_1^2\omega^2$ である。

同様にして
B_{11} を O を中心にして反時計回りに 120° 回転して得られる点を B_{13} とし、
B_{21} を O を中心にして時計回りに 120° 回転して得られる点を B_{23} とする。
C_{11} を O を中心にして反時計回りに 120° 回転して得られる点を C_{13} とし、
C_{21} を O を中心にして時計回りに 120° 回転して得られる点を C_{23} とする。
$B_{13}, B_{23}, C_{13}, C_{23}$ に対応する複素数は各々 $c\gamma_1\omega, c\gamma_1^2\omega^2, a\alpha_1\omega, a\alpha_1^2\omega^2$ である。



類題 2.3.4 BB_{13} と CC_{23} との交点、CC_{13} と AA_{23} との交点、AA_{13} と BB_{23} との交点は正三角形をなす

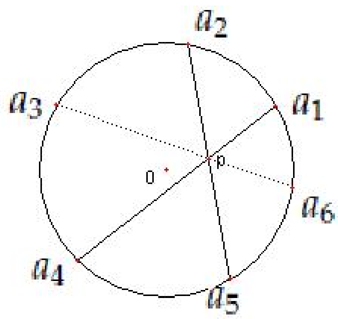


証明　$\alpha = \alpha_1\omega, \beta = \beta_1\omega, \gamma = \gamma_1\omega$ とおくと、式 (2.16) は $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ が補題 2.3.3 での条件 (*) が成り立つことを保証しているので、補題 2.3.3 をこの場合に適用して、この類題が成り立つことが示せる。

まだまだ、幾つかの正三角形が作れるし、正三角形たちの間にも良い関係がありますが、それの紹介は次章に譲ることにする。

2.4　チェバ型の定理

次の定理はチェバの定理によく似た定理である



定理 2.4.1 (チェバ型の定理) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ を単位円上の異なる 6 点とする。
a_1と a_4 を結ぶ直線と a_2と a_5 とを結ぶ直線が点 p で交わるとき
a_3と a_6 を結ぶ直線が p を通るための必要十分条件は

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 - a_6) + (a_2 - a_3)(a_4 - a_5)(a_6 - a_1) = 0$$

が成り立つことである。

証明　$\varphi = (a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 - a_6) + (a_2 - a_3)(a_4 - a_5)(a_6 - a_1)$ とおく。
φ を a_3a_6, a_3, a_6 に注目して展開する。

$$\varphi = -(a_1 - a_2)a_3a_6 + (a_1 - a_2)a_5a_3 + (a_1 - a_2)a_4a_6 - (a_1 - a_2)a_4a_5$$
$$\quad - (a_4 - a_5)a_3a_6 + (a_4 - a_5)a_1a_3 + (a_4 - a_5)a_2a_6 - (a_4 - a_5)a_2a_1$$
$$= (a_2 + a_5 - a_1 - a_4)a_3a_6 + (a_1a_4 - a_2a_5)(a_3 + a_6) + (a_1 + a_4)a_2a_5 - (a_2 + a_5)a_1a_4$$

p が a_1と a_4 を結ぶ直線上にあり、 a_2と a_5 を結ぶ直線上にあるので

$$a_1 + a_4 = p + a_1a_4\overline{p}$$
$$a_2 + a_5 = p + a_2a_5\overline{p}$$

が成り立つ、これを上の式に代入して

$$\varphi = (a_2a_5 - a_1a_4)(a_3a_6\overline{p} - (a_3 + a_6) + p)$$

を得る。

a_1と a_4 を結ぶ直線と a_2と a_5 とを結ぶ直線が平行でないので

$$a_2a_5 - a_1a_4 \neq 0$$

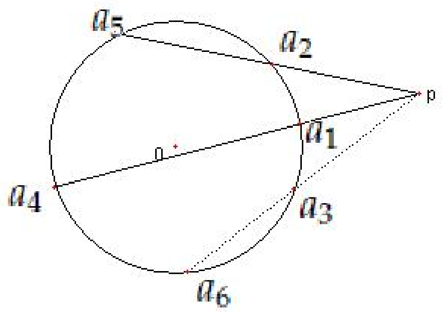
である。従って

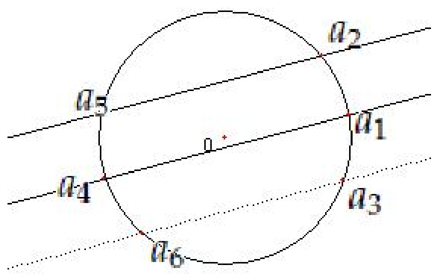
$\varphi = 0$ であることと

$$p + a_3a_6\overline{p} = a_3 + a_6$$

が成り立つこととは同値であり、

このことは、a_2と a_5 を結ぶ直線が p を通ることと同値である。





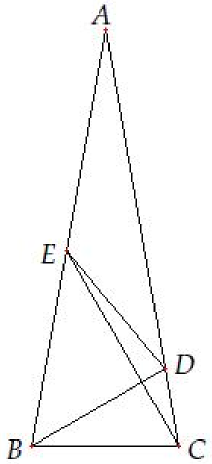
注意　(1)　定理は p が円外にあっても成り立つ。

a_1と a_4 を結ぶ直線と a_2と a_5 とを結ぶ直線が平行のときは

a_3と a_6 を結ぶ直線がそれらと平行である為の必要十分条件は

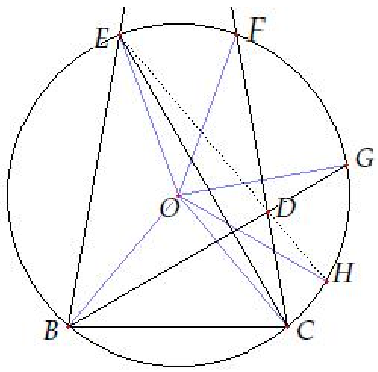
$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 - a_6) + (a_2 - a_3)(a_4 - a_5)(a_6 - a_1) = 0$$

が成り立つことである。



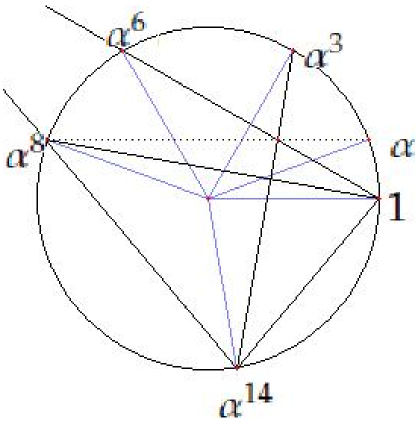
例題 2.4.1 図において $\triangle ABC$ は
$AB = AC, \angle BAC = 20°$
の二等辺三角形である。D は辺 AC 上の点、E は辺 AB の点であり
$\angle CBD = 30°, \angle BCE = 60°$
とするとき
$\angle CED = 10°$
であることを示せ。

平面幾何の証明も易しいのであるが、練習の為定理 *2.4.1(チェバ型の定理)* を使って示してみよう。



証明　$\triangle$ EBC の外接円を描き、その円と CD, BD 各々の延長との交点を各々 F, G とおく。
また、図のように外接円上に点 H を $\angle$ COH = 20° となるようにとる。
D が EH 上にあること、つまり CF, HE, GB が一点で交わることを示そう。

$\angle$ BOC = 2$\angle$BEC = 80°,
$\angle$ COF = $\angle$ BOE = 2$\angle$BCE = 120°,
$\angle$ EOF = (360 − 320)° = 40°,
$\angle$ COG = 2$\angle$CBG = 60°
である。



$\triangle$ EBC の外接円が単位円、C に対応する複素数が 1 と成るように座標をいれて、複素平面で考える。長さが 1 で偏角が 20° の複素数を α とおくと H, G, F, E, B に対応する複素数は各々$\alpha, \alpha^3, \alpha^6, \alpha^8, \alpha^{114}$ である。
1 とα^6, αとα^8 そして α^3とα^{14} 各々を結ぶ 3 直線が一点で交わることを示そう。

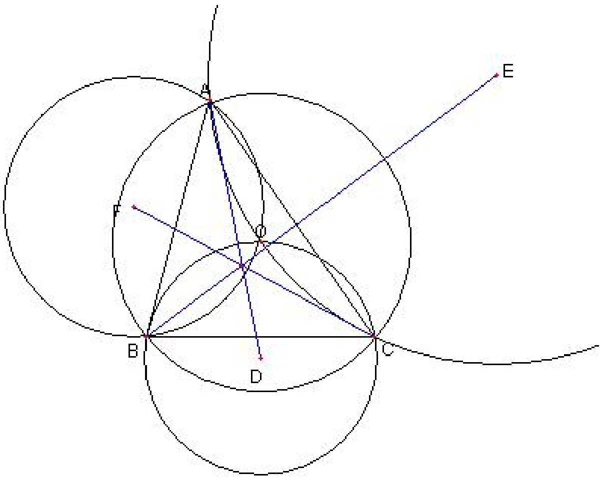
$\varphi = (1-\alpha)(\alpha^3-\alpha^6)(\alpha^8-\alpha^{14}) + (\alpha-\alpha^3)(\alpha^6-\alpha^8)(\alpha^{14}-1)$
とおく。　$\varphi = 0$ であることを示そう。
$\alpha^9 = -1$ である。　また $(1+\alpha^3)(1-\alpha^3+\alpha^6) = 1+\alpha^9 = 0$ で $1+\alpha^3 \neq 0$ なの

で $1-\alpha^3+\alpha^6=0$ である。
$\alpha^3-\alpha^6=1, 1-\alpha^6=(1-\alpha^2)(1+\alpha^2+\alpha^4)$, $1=\alpha^{18}$ を利用して計算する。

$$\frac{\varphi}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)}=\alpha^8(1+\alpha^2+\alpha^4)+\alpha^{21}(1+\alpha)(1-\alpha^4)$$
$$=\alpha^8-\alpha-\alpha^3+\alpha^3+\alpha^4-\alpha^7-\alpha^8=-\alpha(1-\alpha^3+\alpha^6)=0$$

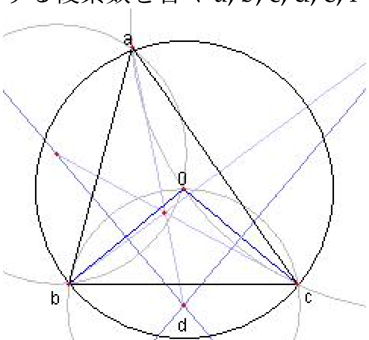
$\varphi=0$ が示せたので、定理 2.4.1 より、いま、考慮している 3 直線は一点で交わる。 故に $\angle CED=10°$ が示せた。

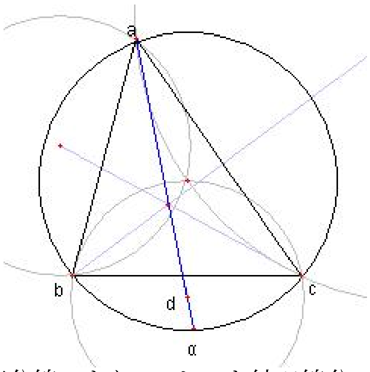
2.5　コスニタの定理



定理 2.5.1 *(コスニタの定理)*
$\triangle ABC$ を鋭角三角形、O はその外心とする。
D, E, F を各々 $\triangle OBC, \triangle OCA, \triangle OAB$ の外心とする。この時、AD, BE, CF は一点で交わる。

証明　適当に、△ABC の外接円が単位円となるように入れて複素平面で考える。単位円の幾何学 (2.4.1 (チェバ型の定理)) を使う。A, B, C, D, E, F に対応する複素数を各々 a, b, c, d, e, f で表わすことにします。





d は 0 と b を結ぶ線分の垂直二等分線にあり、0 と c を結ぶ線分の垂直二等分線にあるので、次が成り立つ。

$$\begin{cases} d+b^2\overline{d}=b \\ d+c^2\overline{d}=c \end{cases} \tag{2.22}$$

これを解いて次を得る。

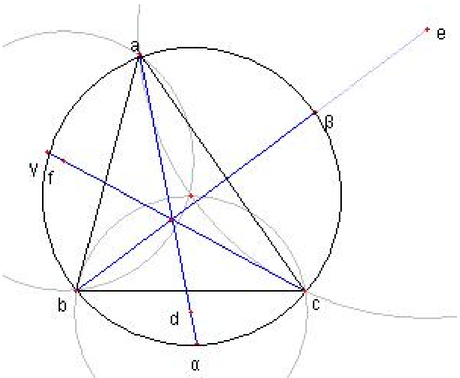
$$\overline{d} = \frac{1}{b+c},\ d = \frac{bc}{b+c} \tag{2.23}$$

a と d を結ぶ直線が再び単位円と交わる複素数を α とおくと、d は a とα を結ぶ直線上にあるので

$$d + a\alpha\overline{d} = a + \alpha \tag{2.24}$$

従って

$$\alpha = \frac{a-d}{a\overline{d}-1} = \frac{ca+ab-bc}{a-b-c} \tag{2.25}$$



b と e を結ぶ直線が再び単位円と交わる複素数を β とおき、c と f を結ぶ直線が再び単位円と交わる複素数を γ とおくと、上と同様にして、次を得る。

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{ab+bc-ca}{b-c-a} \\ \gamma = \dfrac{bc+ca-ab}{c-a-b} \end{cases} \tag{2.26}$$

以上より次の式を得る。

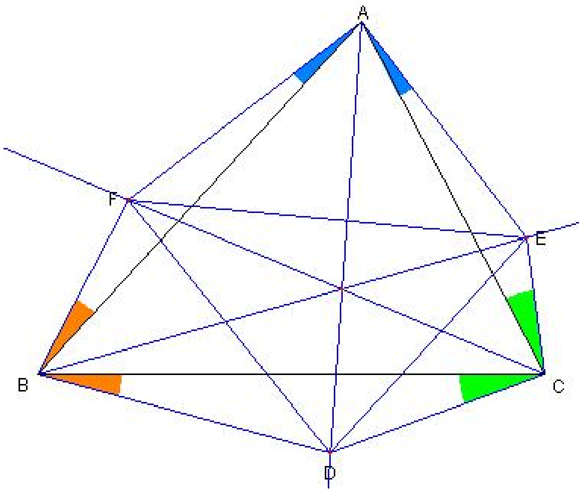
$$\begin{cases} a-\gamma = \dfrac{-a^2-bc}{c-a-b} & \gamma-b = \dfrac{b^2+ca}{c-a-b} \\ b-\alpha = \dfrac{-b^2-ca}{a-b-c} & \alpha-c = \dfrac{c^2+ab}{a-b-c} \\ c-\beta = \dfrac{-c^2-ab}{b-c-a} & \beta-a = \dfrac{a^2+bc}{b-c-a} \end{cases} \tag{2.27}$$

従って

$$(a-\gamma)(b-\alpha)(c-\beta) + (\gamma-b)(\alpha-c)(\beta-a) = 0 \tag{2.28}$$

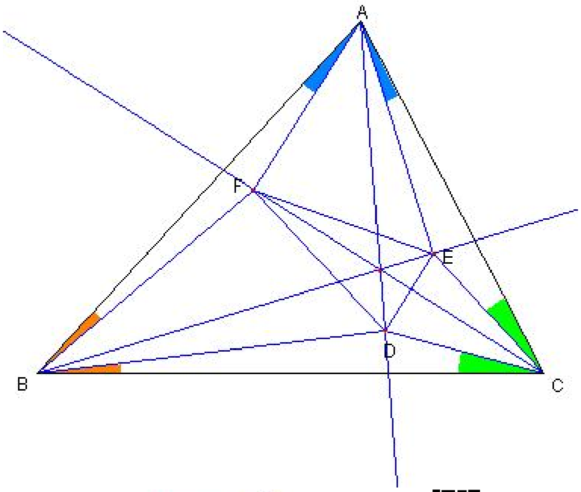
を得る。チェバ型の定理より a とα, b とβ, c とγ 各々を結ぶ三本の直線が一点で交わることがわかる。

2.6　チェバ型定理の応用２



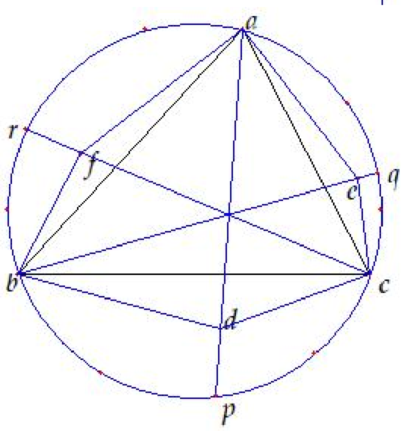
定理 2.6.1（外側）

図のように △ABC の外側に点 D, E, F を
∠DBC = ∠DCB
∠ECA = ∠EAC
∠FAB = ∠FBA
であるようにとるとき
三直線 AD, BE, CF は一点で交わる

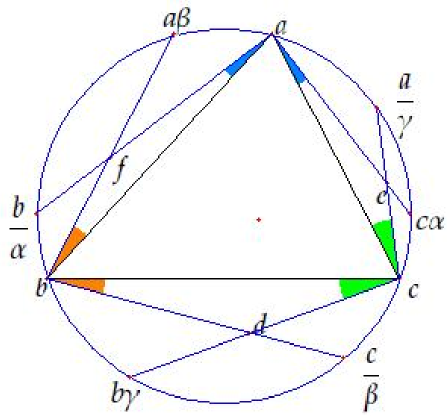


(内側)　定理は D, E, F を △ABC の内側にとっても成り立つ

(ともに　AD と BE が交わるという条件で考えましょう)



証明　△ABC の外接円が単位円となるように座標を入れて複素平面で考えよう。A ~ F に対応する複素数を $a \sim f$ で表わすことにする。
a と d を結ぶ直線が再び単位円と交わる点を p とおき、b と e を結ぶ直線が再び単位円と交わる点を q とおき、c と f を結ぶ直線が再び単位円と交わる点を r とおく。
定理 2.4.1(チェバ型の定理) を利用して、この定理を証明する。



∠DBC = ∠DCB
∠ECA = ∠EAC
∠FAB = ∠FBA
なので長さが 1 の複素数 α, β, γ で d が b と $\frac{c}{\beta}$ を結ぶ直線と c と $b\gamma$ を結ぶ直線上にあり、e が c と $\frac{a}{\gamma}$ を結ぶ直線と a と $c\alpha$ を結ぶ直線上にあり、f が a と $\frac{b}{\alpha}$ を結ぶ直線と b と $a\alpha$ を結ぶ直線上にあるものがある。

d が b と $\frac{c}{\beta}$ を結ぶ直線と c と $b\gamma$ を結ぶ直線上にあるので、定理 1.4.1 より、次が成り立つ。

$$\begin{cases} d + \frac{bc}{\beta}\overline{d} = b + \frac{c}{\beta} \\ d + bc\gamma\overline{d} = c + b\gamma \end{cases} \tag{2.29}$$

これから d と $\overline{d}$ をもとめて、次を得る。

$$\begin{cases} d = \dfrac{b\beta\gamma + c\gamma - b\gamma - c}{\beta\gamma - 1} \\ \overline{d} = \dfrac{b\beta\gamma + c\beta - b\beta - c}{bc(\beta\gamma - 1)} \end{cases} \tag{2.30}$$

d が a と p を結ぶ直線上にあるので
$d + ap\overline{d} = a + p$
従って
$p = \dfrac{a - d}{a\overline{d} - 1}$
これに式 2.30 の値を代入して

$$p = \frac{bc(a\beta\gamma - a - b\beta\gamma - c\gamma + b\gamma + c)}{ab\beta\gamma + ac\beta - ab\beta - ac - bc\beta\gamma + bc} \tag{2.31}$$

$\varphi_1 = ab\beta\gamma + ac\beta - ab\beta - ac - bc\beta\gamma + bc$ とおく。このとき
$c(a\beta\gamma - a - b\beta\gamma - c\gamma + b\gamma + c) - (ab\beta\gamma + ac\beta - ab\beta - ac - bc\beta\gamma + bc)$
$= (c - b)(a\beta - c)(\gamma - 1)$
なので
$b - p = \dfrac{b(c - b)(a\beta - c)(\gamma - 1)}{\varphi_1}$

$(ab\beta\gamma + ac\beta - ab\beta - ac - bc\beta\gamma + bc) - b(a\beta\gamma - a - b\beta\gamma - c\gamma + b\gamma + c)$
$= (b - c)(b\gamma - a)(\beta - 1)$
なので
$p - c = \dfrac{c(b - c)(b\gamma - a)(beta - 1)}{\varphi_1}$

$\alpha \longrightarrow \beta \longrightarrow \gamma \longrightarrow \alpha, a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow$ なる置換を φ_1 に施したものを φ_2, φ_2 に施したものを φ_3 とおく。このとき、次の結果を得る。

$$\begin{cases} b-p = \dfrac{b(c-b)(a\beta-c)(\gamma-1)}{\varphi_1} & p-c = \dfrac{c(b-c)(b\gamma-a)(\beta-1)}{\varphi_1} \\ c-q = \dfrac{c(a-c)(b\gamma-a)(\alpha-1)}{\varphi_2} & q-a = \dfrac{a(c-a)(c\alpha-b)(\gamma-1)}{\varphi_2} \\ a-r = \dfrac{a(b-a)(c\alpha-b)(\beta-1)}{\varphi_3} & r-b = \dfrac{b(a-b)(a\beta-c)(\alpha-1)}{\varphi_3} \end{cases} \tag{2.32}$$

これより

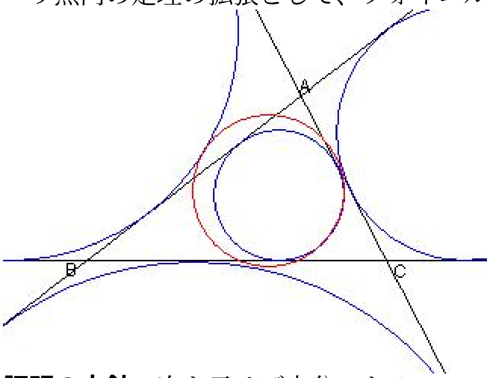
$$(a-r)(b-p)(c-q)+(r-b)(p-c)(q-a)=0 \tag{2.33}$$

をえる。定理 2.4.1（チェバ型の定理）より
a と p, b と q, c と r の各々を結ぶ三本の直線は一点で交わる。

この証明は (内側) の場合も通用します。

2.7 フォイエルバッハの定理

9 点円の定理の拡張として、フォイエルバッハの定理を証明しましょう。



定理 2.7.1（フォイエルバッハの定理）
△ ABC において、その 9 点円はその内接円に内接し、その傍接円に外接する。

証明の方針 次を示せば十分である
(1) 9 点円の半径と内接円の半径の差が 9 点円の中心と内接円の中心との距離に等しい
(2) 9 点円の半径と傍接円の半径の和が 9 点円の中心と傍接円の中心との距離に等しい
これらのことを、△ ABC の外接円が単位円となるように座標を入れて複素平面で考える。

証明のための計算の補題を準備しよう。

補題 2.7.2 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ は長さ *1* の複素数で次を満たすとする
(*) $\alpha\beta\gamma = -1, b = a\alpha^2, c = b\beta^2, a = c\gamma^2$
次の数を考える
$\tau = \alpha + \beta + \gamma$

$\sigma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
$\xi = \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha$
$h = a + b + c, k = \dfrac{h}{2}$
$\eta = a\alpha + b\beta + c\gamma$
このとき+、次が成り立つ

(1)　$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -(\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}) = -\overline{\tau}$
(2)　$\sigma = \tau^2 + 2\overline{\tau},\ \overline{\sigma} = \overline{\tau}^2 + 2\tau$
(3)　$\dfrac{\sigma - \overline{\sigma}}{\tau - \overline{\tau}} = \tau + \overline{\tau} - 2$
(4)　$\eta\overline{\eta} = 3 - \tau - \overline{\tau}$
(5)　$\eta\overline{h} = \tau + \overline{\tau} + \xi,\ \overline{\eta}h = \tau + \overline{\tau} + \overline{\xi}$
(6)　$h\overline{h} = 3 + \sigma + \overline{\sigma} = 3 + \tau^2 + \overline{\tau}^2 + 2\tau + 2\overline{\tau}$
(7)　$\xi + \overline{\xi} = 3 - \tau\overline{\tau}$
(8)　$|\eta - k| = |\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sigma - \overline{\sigma}}{2(\tau - \overline{\tau})}|$

証明　(1)　$\alpha\beta = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\gamma} = \dfrac{-1}{\gamma} = -\overline{\gamma}$
である。同様の計算して (1) を得る。
(2)　(1) より
$\sigma = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \tau^2 + 2\overline{\tau}$
また、上の式の両辺の共役をとって $\overline{\sigma} = \overline{\tau}^2 + 2\tau$
(3)　(2) より
$+\dfrac{\sigma - \overline{\sigma}}{\tau - \overline{\tau}} = \dfrac{\tau^2 + 2\overline{\tau} - \overline{\tau}^2 - 2\tau}{\tau - \overline{\tau}} = \tau + \overline{\tau} - 2$
(4)　$\eta\overline{\eta} = (a\alpha + b\beta + c\gamma)(\dfrac{1}{a\alpha} + \dfrac{1}{b\beta} + \dfrac{1}{c\gamma}) = 3 + \dfrac{b\beta}{a\alpha} + \dfrac{c\gamma}{b\beta} + \dfrac{a\alpha}{c\gamma} + \dfrac{c\gamma}{a\alpha} + \dfrac{a\alpha}{b\beta} + \dfrac{b\beta}{c\gamma}$
条件 (*) を使って
$\eta\overline{\eta} = 3 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \dfrac{1}{\gamma\alpha} + \dfrac{1}{\alpha\beta} + \dfrac{1}{\beta\gamma} = 3 - \overline{\tau} - \tau$
(5)　$\eta\overline{h} = (a\alpha + b\beta + c\gamma)(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}) = \alpha + \beta + \gamma + \dfrac{b\beta}{a} + \dfrac{c\gamma}{b} + \dfrac{a\alpha}{c} + \dfrac{c\gamma}{a} + \dfrac{a\alpha}{b} + \dfrac{b\beta}{c}$
$= \tau + \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \tau + \xi + \overline{\tau}$
両辺の共役をとって $\overline{\eta}h = \tau + \overline{\tau} + \overline{\xi}$ を得る。
(6)　$h\overline{h} = (a + b + c)(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}) = 3 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c}$
$= 3 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dfrac{1}{\gamma^2} + \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = 3 + \sigma + \overline{\sigma} = 3 + \tau^2 + \overline{\tau}^2 + 2\tau + 2\overline{\tau}$
(7)　$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = 1$ を利用する。
$\xi + \overline{\xi} = \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \dfrac{1}{\alpha^2\beta} + \dfrac{1}{\beta^2\gamma} + \dfrac{1}{\gamma^2\alpha} = \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2$
$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(\alpha + \beta + \gamma) - 3\alpha\beta\gamma = -\overline{\tau}\tau + 3$
(8)　今までの結果をつかう。
$(|\eta - k|)^2 = (\eta - \dfrac{1}{2}h)(\overline{\eta} - \dfrac{1}{2}\overline{h}) = \eta\overline{\eta} - \dfrac{1}{2}\eta\overline{h} - \dfrac{1}{2}\overline{\eta}h + \dfrac{1}{4}h\overline{h}$

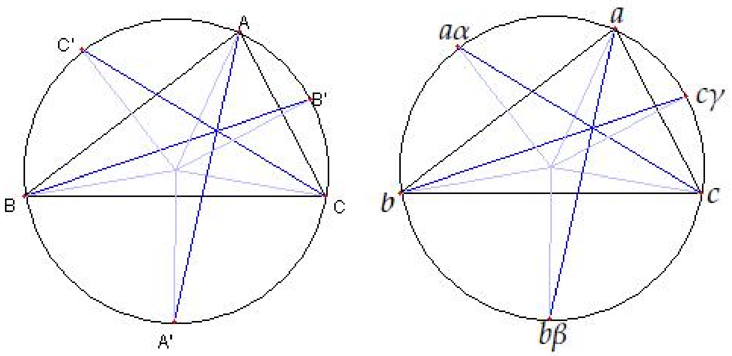
$$= 3 - \tau - \overline{\tau} - \frac{1}{2}(\tau + \overline{\tau} + \xi) - \frac{1}{2}(\tau + \overline{\tau} + \overline{\xi}) + \frac{1}{4}(3 + \tau^2 + \overline{\tau}^2 + 2\tau + 2\overline{\tau})$$
$$= \frac{15}{4} - \frac{3}{2}(\tau + \overline{\tau}) + \frac{1}{4}(\tau^2 + \overline{\tau}^2) - \frac{1}{2}(\xi + \overline{\xi}) = \frac{15}{4} - \frac{3}{2}(\tau + \overline{\tau}) - \frac{1}{2}(3 - \tau\overline{\tau})$$
$$= \frac{9}{4} - \frac{3}{2}(\tau + \overline{\tau}) + \frac{1}{4}(\tau^2 + \overline{\tau}^2) + \frac{1}{4}\tau\overline{\tau} = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\tau + \overline{\tau}))^2$$

一方

$$\frac{1}{2} - \frac{\sigma - \overline{\sigma}}{2(\tau - \overline{\tau})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\tau + \overline{\tau} - 2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\tau + \overline{\tau})$$

よって、求める結果を得る

定理 2.7.1 **の** (1) **の証明**



∠BAC の二等分線と単位円との交点を A′, ∠CBA の二等分線と単位円との交点を B′ そして ∠ACB の二等分線と単位円との交点を C′ とする。A, B, C に対応する複素数を a, b, c とする。 長さが 1 で偏角が各々∠BAC, ∠CBA, ∠ACB の複素数を各々β, γ, α とおくと A′, B′, C′ に対応する複素数は各々 $b\beta, c\gamma, a\alpha$ となる。$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ に対して次が成り立つ。

$b = a\alpha^2, c = b\beta^2, a = c\gamma^2, \alpha\beta\gamma = -1$

つまり補題 2.7.2 の条件 (*) が成り立っている。$\tau, \sigma, \xi, h, k, \eta$ は補題 2.7.2 で定めたものとする。

このとき、定理 2.1.1(９点円の定理) の証明より h は △ABC の垂心に対応する複素数であり、k は９点円の中心に対応する複素数である。

９点円の半径は $\frac{1}{2}$ であった。今から、△ABC の内接円がその中心に対応する複素数が η で半径が $\frac{\sigma - \overline{\sigma}}{2(\tau - \overline{\tau})}$ であることを示そう。これが示せたら、補題 2.7.2 の (8) は定理の主張 (1) が正しいことを意味している。

p を △ABC の内接円の中心に対応する複素数とする。p は b と $c\gamma$ を結ぶ直線上にあり、c と $a\alpha$ を結ぶ直線上にあるので、次が成り立っている。

$$\begin{cases} p + bc\gamma\overline{p} = b + c\gamma \\ p + ca\alpha\overline{p} = c + a\alpha \end{cases} \tag{2.34}$$

$b = a\alpha^2$ なので、この式より

$$(1 - \gamma\alpha)p = b + c\gamma - c\gamma\alpha - a\alpha^2\gamma \tag{2.35}$$

また $c\gamma^2 = a, \alpha\beta\gamma = -1$ なので

$$(1-\gamma\alpha)\eta = (1-\gamma\alpha)(a\alpha + b\beta + c\gamma)$$
$$= a\alpha + b\beta + c\gamma - a\alpha^2\gamma - b\alpha\beta\gamma - c\gamma^2\alpha = b\beta + c\gamma - a\alpha^2\gamma + b$$

$1-\gamma\alpha \neq 0$ なのでこれと式 (2.35) より $p = \eta$ を得る。

$\triangle$ABC の面積を S 半径を r として AB + BC + CA の半分を s とおくとき

$$S = rs \tag{2.36}$$

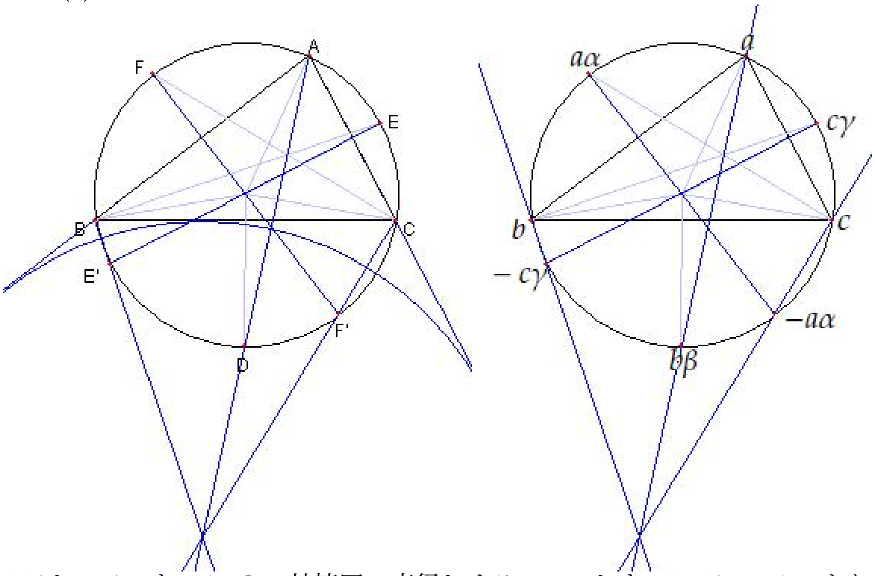
である。

$\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a = \sigma$ に注意すると、定理**??**より $S = \dfrac{\sigma - \bar{\sigma}}{4i}$ である。

また、$\angle$BAC が β の偏角に等しいことを考慮すると BC $= \dfrac{\beta - \bar{\beta}}{i}$ である。CA, AB に同様のことを考えて $s = \dfrac{\tau - \bar{\tau}}{i}$ を得る。従って、式 (2.36) より $r = \dfrac{\sigma - \bar{\sigma}}{2(\tau - \bar{\tau})}$ を得る。

以上より (1) が示せた。

次に (2) について考えよう。$\triangle$ABC の $\angle$BAC 内にある傍接円で示そう。



EE′ と FF′　を $\triangle$ABC の外接円の直径とする。このとき $\angle$EBE′ = 90° であり BE が $\angle$ABC の二等分線なので BE′ は $\angle$ABC の外角の二等分線である (B = E′ のときは BE′ は B における外接円の接線とする)。同様に CF′ は $\angle$ABC の外角の二等分線である。BE′ と CF′ の交点が今考えている傍接円の中心である。それに対応する複素数を η' とおく。η' は b と $-c\gamma$ を結ぶ直線上にあり、c と $-a\alpha$ を結ぶ直線上にある。

$b = a(-\alpha)^2, c(-\gamma)^2 = a, (-\alpha)\beta(-\gamma) = -1$

なので、内心を求めた方法と同様にして

$\eta' = -a\alpha + b\beta - c\gamma$

を得る。(η において α と γ の符号を変えたもの)
補題 2.7.2 において αを $-\alpha$ にかえて γを $-\gamma$ に変えても (*) に相当する条件は不変である。つまり、次が成り立つ
(*)′　$(-\alpha)\beta(-\gamma) = -1, b = a(-\alpha)^2, c = b\beta^2, a = c(-\gamma)^2$
従って

$\tau' = -\alpha + \beta - \gamma$
$\sigma' = (-\alpha)^2 + \beta^2 + (-\gamma)^2$
$\xi' = (-\alpha)^2\beta + \beta^2(-\gamma) + (-\gamma)^2(-\alpha)$
$h = a + b + c, k = \dfrac{h}{2}$
$\eta' = -a\alpha + b\beta - c\gamma$

とおくと、補題 2.7.2 の (1) から (8) に相当するものが成り立つ。特に (8) が成り立つ。　つまり次が成り立つ。
(8)′　$|\eta' - k| = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sigma' - \overline{\sigma'}}{2(\tau' - \overline{\tau'})}\right|$
これの左辺は傍心と 9 点円の中心との距離であるので、$-\dfrac{\sigma' - \overline{\sigma'}}{2(\tau' - \overline{\tau'})}$ が傍心円の半径であることを示せば定理の (2) が示せることになる。
Q を傍心とし r′ を傍接円の半径とするとき

$S = \triangle\mathrm{ABC}$ の面積 $=$ $\triangle\mathrm{PAB}$ の面積 $+$ $\triangle\mathrm{PAC}$ の面積 $-$ $\triangle\mathrm{PBC}$ の面積
$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積 $= \dfrac{\mathrm{AB}\times r'}{2} = \dfrac{(\alpha - \overline{\alpha})r}{2i}$
$\triangle\mathrm{PAC}$ の面積 $= \dfrac{\mathrm{AC}\times r'}{2} = \dfrac{(\gamma - \overline{\gamma})r}{2i}$
$\triangle\mathrm{PBC}$ の面積 $= \dfrac{\mathrm{BC}\times r'}{2} = \dfrac{(\beta - \overline{\beta})r}{2i}$

なので

$$S = \frac{(-\tau' + \overline{\tau'})}{2i} r' \tag{2.37}$$

をえる。また

$$S = \frac{(\sigma - \overline{\sigma})}{4i} = \frac{(\sigma' - \overline{\sigma'})}{4i} \tag{2.38}$$

なので

$$r' = -\frac{\sigma' - \overline{\sigma'}}{2(\tau' - \overline{\tau'})} \tag{2.39}$$

を得る。

第3章　単位円の幾何のさらなる応用

3.1　モーレの定理の続き

前章 (第 2 章) の節 (2.3) において、モーレの定理関係の三つの正三角形を考察してきたが、ここでは更に考察を深めよう。前の考察での記号はそのまま継承することにする

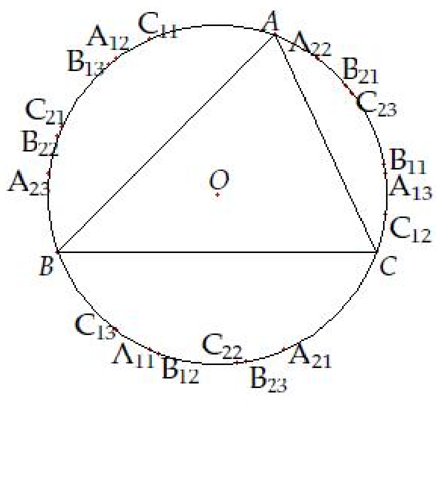
つまり、$\triangle$ABC の外接円が単位円となるよう座標を入れ、複素平面で考える。A, B, C に対応する複素数を各々 a, b, c 　としていた。長さが 1 の複素数の組 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ で次の条件を満たすものがあった。(2.16 参照)

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \omega,\ b = a\alpha_1^3, c = b\beta_1^3, a = c\gamma_1^3 \tag{3.1}$$

また、単位円上に、点と数が次の表でまとめられるような１８個の点 (複素数) を考えた。

A_{11}	$b\beta_1$	A_{12}	$b\beta_1\omega^2$	A_{13}	$b\beta_1\omega$
A_{21}	$b\beta_1^2$	A_{22}	$b\beta_1^2\omega$	A_{23}	$b\beta_1^2\omega^2$
B_{11}	$c\gamma_1$	B_{12}	$c\gamma_1\omega^2$	B_{13}	$c\gamma_1\omega$
B_{21}	$c\gamma_1^2$	B_{22}	$c\gamma_1^2\omega$	B_{23}	$c\gamma_1^2\omega^2$
C_{11}	$a\alpha_1$	C_{12}	$a\alpha_1\omega^2$	C_{13}	$a\alpha_1\omega$
C_{21}	$a\alpha_1^2$	C_{22}	$a\alpha_1^2\omega$	C_{23}	$a\alpha_1^2\omega^2$

(3.2)



$\triangle$ABC の外接円上に １８個の点が図のように並んでいる。

定理 2.3.1(モーレの定理)、定理 2.3.2(モーレの定理 (外角))、類題 (2.3.4) は各々
BB_{11} と CC_{21} との交点、CC_{11} と AA_{21} との交点、AA_{11} と BB_{21} との交点、この３点が正三角形をなす。
BB_{12} と CC_{22} との交点、CC_{12} と AA_{22} との交点、AA_{12} と BB_{22} との交点、この３点が正三角形をなす。
BB_{13} と CC_{23} との交点、CC_{13} と AA_{23} との交点、AA_{13} と BB_{23} との交点、この３点が正三角形をなす。
以上のことを主張している。

考察を続ける上で、この節では次の記号を使うことにする。

定義 3.1.1 *(1)*　単位円上の点 P_1, P_2, P_3, P_4 に対して、
$\tau(P_1P_2, P_3P_4)$
でもって、P_1P_2, P_3P_4 の交点を表わすことにする
P_1, P_2, P_3, P_4 に対応する複素数を各々p_1, p_2, p_3, p_4 のとき
$\tau(P_1P_2, P_3P_4)$ に対応する複素数を
$\tau(p_1, p_2, p_3, p_4)$
で表わす。
(2)　単位円上の点 P_{st}　$(1 \le s \le 3, 1 \le t \le 4)$ に対して
$Q_s = \tau(P_{s1}P_{s2}, P_{s1}P_{s2})$ $(1 \le s \le 3)$ とするとき
$\sigma(P_{11}P_{12}, P_{13}P_{14}, P_{21}P_{22}, P_{23}P_{24}, P_{31}P_{32}, P_{33}P_{34})$
でもって (Q_1, Q_2, Q_3) を表わす。
P_{st} に対応する複素数を p_{st} とし,
Q_s に対応する複素数を q_s $(1 \le s \le 3, 1 \le t \le 4)$ とするとき
$\sigma(p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}, p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{34})$
でもって (q_1, q_2, q_3) を表わすことにする。
(3)　３点 Q_1, Q_2, Q_3 が反時計回りに正三角形をなすとき
(Q_1, Q_2, Q_3) は反時計回りに正三角形をなすという。
３個の複素数 q_1, q_2, q_3 が反時計回りに正三角形をなすとき
(q_1, q_2, q_3) は反時計回りに正三角形をなすという。

注意　上の定義において P, Q が単位円上の点で P = Q のときは、直線 PQ は P における単位円の接線を表わすことにしている。

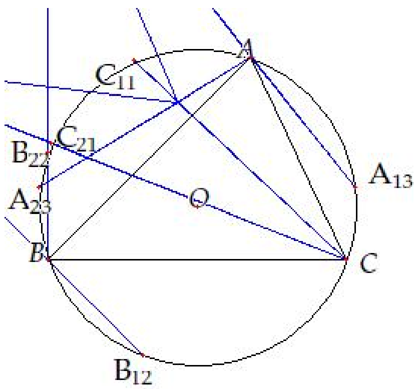
上の定義を利用すると、前章 (第 2 章) の節 (2.3) の補題 2.3.3 の (3) は次を主張している。

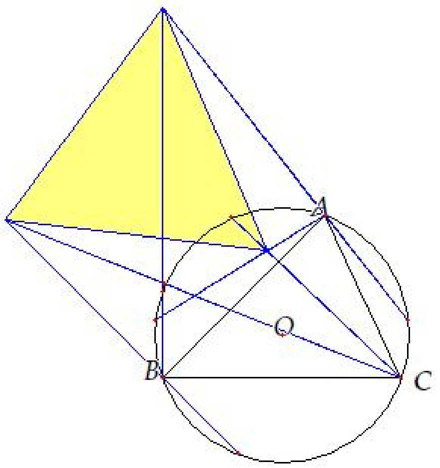
補題 3.1.1 *a, b, c は長さが 1 の異なる複素数として、α, β, γ は長さが 1 の複素数で次が成り立っているとする。*

(*)　$\alpha\beta\gamma=\omega, b=a\alpha^3, c=b\beta^3, a=c\gamma^3$
このとき
　$\sigma(b, c\gamma, c, a\alpha^2, c, a\alpha, a, b\beta^2, a, b\beta, b, c\gamma^2)$
　　は反時計回りに正三角形をなす。

$\alpha=\alpha_1, \beta=\beta_1, \gamma=\gamma_1$ とおくと、式 (3.1) より補題 3.1.1 が適用できる。従って
　$\sigma(b, c\gamma_1, c, a\alpha_1^2, c, a\alpha_1, a, b\beta_1^2, a, b\beta_1, b, c\gamma_1^2)$
は反時計回りに正三角形をなす。　つまり
　$\sigma(BB_{11}, CC_{21}, CC_{11}, AA_{21}, AA_{11}, BB_{21})$
は反時計回りに正三角形をなす。　これが定理 2.3.1 である。
$\alpha=\alpha_1\omega^2, \beta=\beta_1\omega^2, \gamma=\gamma_1\omega^2$ とおくと、式 (3.1) より補題 3.1.1 が適用できる。従って
　$\sigma(b, c\gamma_1\omega^2, c, a\alpha_1^2\omega, c, a\alpha_1\omega^2, a, b\beta_1^2\omega, a, b\beta_1\omega^2, b, c\gamma_1^2\omega)$
は反時計回りに正三角形をなす。　つまり
　$\sigma(BB_{12}, CC_{22}, CC_{12}, AA_{22}, AA_{12}, BB_{22})$
は反時計回りに正三角形をなす。　これが定理 2.3.2 である。
$\alpha=\alpha_1\omega, \beta=\beta_1\omega, \gamma=\gamma_1\omega$ とおくと、式 (3.1) より補題 3.1.1 が適用できる。従って
　$\sigma(b, c\gamma_1\omega, c, a\alpha_1^2\omega^2, c, a\alpha_1\omega, a, b\beta_1^2\omega^2, a, b\beta_1\omega, b, c\gamma_1^2\omega^2)$
は反時計回りに正三角形をなす。　つまり
　$\sigma(BB_{13}, CC_{23}, CC_{13}, AA_{23}, AA_{13}, BB_{23})$
は反時計回りに正三角形をなす。　これが類題 2.3.4 である。

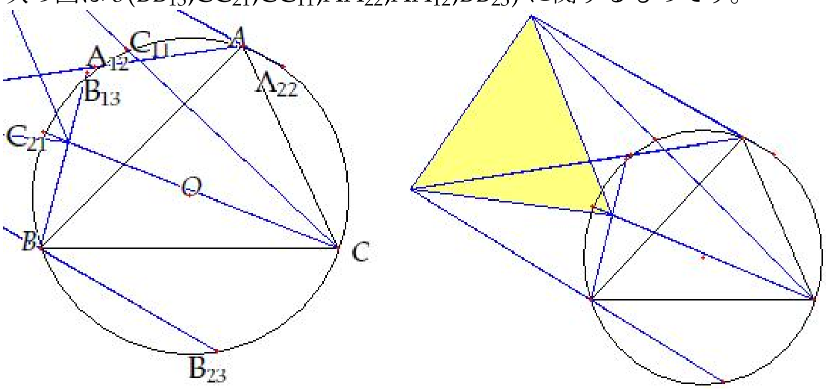
$\alpha=\alpha_1, \beta=\beta_1\omega, \gamma=\gamma_1\omega^2$ としても、補題 3.1.1 が適用できる。従って
$\sigma(b, c\gamma_1\omega^2, c, a\alpha_1^2, c, a\alpha_1, a, b\beta_1^2\omega^2, a, b\beta_1\omega, b, c\gamma_1^2\omega)$
は反時計回りに正三角形をなす。つまり、式 (3.2) を参考にして
$\sigma(BB_{12}, CC_{21}, CC_{11}, AA_{23}, AA_{13}, BB_{22})$
が反時計回りに正三角形をなすことが分かる。次の図はそれの図です。



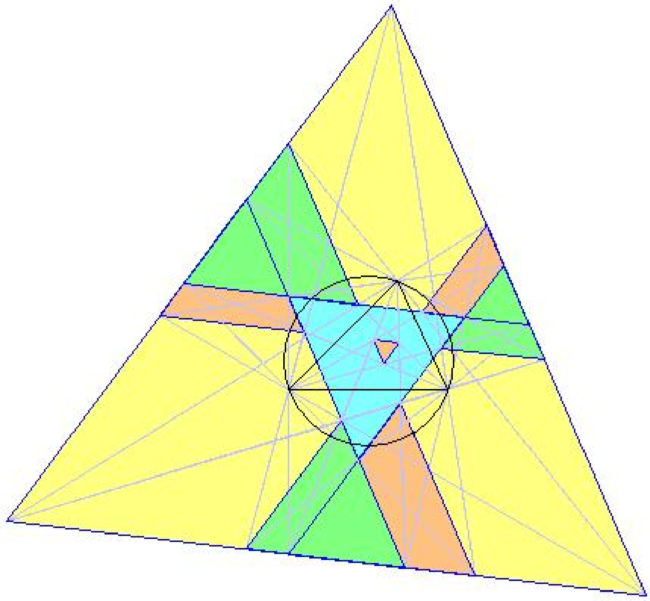


$\alpha = \alpha_1\omega^2, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1\omega$ として、補題 3.1.1 を、
$\alpha = \alpha_1\omega, \beta = \beta_1\omega^2, \gamma = \gamma_1$ として、補題 3.1.1 を各々適用して
$\sigma(b, c\gamma_1\omega, c, a\alpha_1^2\omega, c, a\alpha_1\omega^2, a, b\beta_1^2, a, b\beta_1, b, c\gamma_1^2\omega^2)$,
$\sigma(b, c\gamma_1, c, a\alpha_1^2\omega^2, c, a\alpha_1\omega, a, b\beta_1^2\omega, a, b\beta_1\omega^2, b, c\gamma_1^2)$
各々が反時計回りに正三角形をなすことがわかる。つまり、式 (3.2) を参考にして
$\sigma(\mathrm{BB}_{13},\mathrm{CC}_{22},\mathrm{CC}_{12},\mathrm{AA}_{21},\mathrm{AA}_{11},\mathrm{BB}_{23})$,
$\sigma(\mathrm{BB}_{11},\mathrm{CC}_{23},\mathrm{CC}_{13},\mathrm{AA}_{22},\mathrm{AA}_{12},\mathrm{BB}_{21})$
各々が反時計回りに正三角形をなすことが分かる。

更に、$\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1\omega^2, \gamma = \gamma_1\omega$ として、
$\alpha = \alpha_1\omega, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1\omega^2$ としてそして
$\alpha = \alpha_1\omega^2, \beta = \beta_1\omega, \gamma = \gamma_1$ として
各々に補題 3.1.1 を各々適用して
$\sigma(b, c\gamma_1\omega, c, a\alpha_1^2, c, a\alpha_1, a, b\beta_1^2\omega, a, b\beta_1\omega^2, b, c\gamma_1^2\omega^2)$,
$\sigma(b, c\gamma_1\omega^2, c, a\alpha_1^2\omega^2, c, a\alpha_1\omega, a, b\beta_1^2, a, b\beta_1, b, c\gamma_1^2\omega)$,
$\sigma(b, c\gamma_1, c, a\alpha_1^2\omega, c, a\alpha_1\omega^2, a, b\beta_1^2\omega^2, a, b\beta_1\omega, b, c\gamma_1^2)$
各々が反時計回りに正三角形をなすことがわかる。つまり、式 (3.2) を参考にして
$\sigma(\mathrm{BB}_{13},\mathrm{CC}_{21},\mathrm{CC}_{11},\mathrm{AA}_{22},\mathrm{AA}_{12},\mathrm{BB}_{23})$,
$\sigma(\mathrm{BB}_{12},\mathrm{CC}_{23},\mathrm{CC}_{13},\mathrm{AA}_{21},\mathrm{AA}_{11},\mathrm{BB}_{22})$,
$\sigma(\mathrm{BB}_{11},\mathrm{CC}_{22},\mathrm{CC}_{12},\mathrm{AA}_{23},\mathrm{AA}_{13},\mathrm{BB}_{21})$
の各々が反時計回りに正三角形をなすことが分かる。
次の図は $\sigma(\mathrm{BB}_{13},\mathrm{CC}_{21},\mathrm{CC}_{11},\mathrm{AA}_{22},\mathrm{AA}_{12},\mathrm{BB}_{23})$ に関するものです。

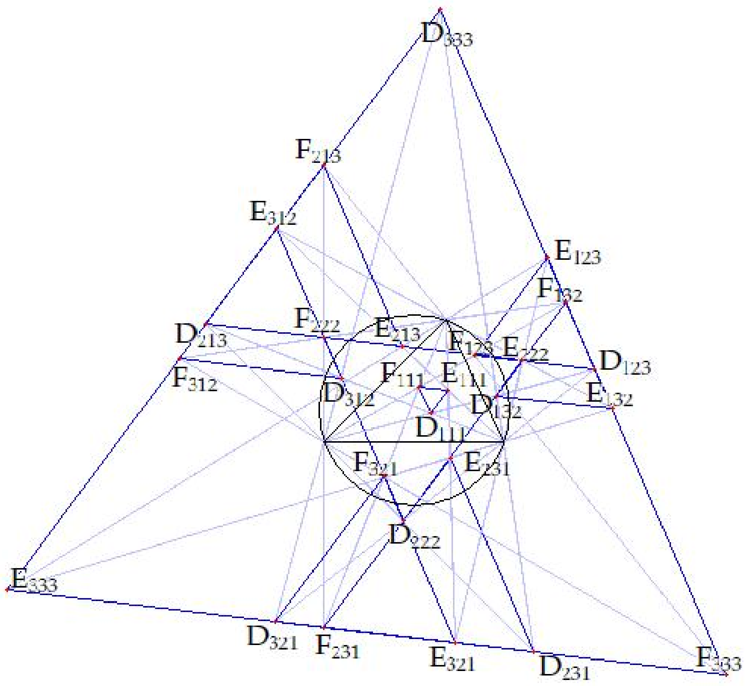


定理 3.1.2 *$\sigma(BB_{1s},CC_{2t},CC_{1t},AA_{2u},AA_{1u},BB_{2s})$*
は反時計回りに正三角形をなす。ただし (s, t, u) は次のいづれかである。
$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)$



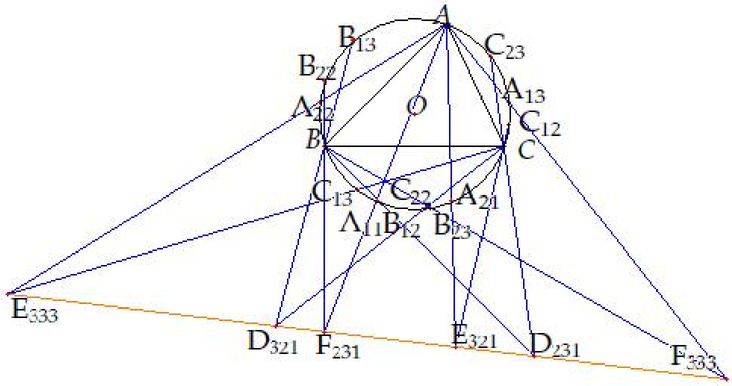
定理 3.1.2 に現れる 9 個の正三角形です。一部は重なっています。
未だ説明していない現象がみて取れます。

(s,t,u) が定理 3.1.2 の条件を満たすとき
$(\mathrm{D}_{stu}, \mathrm{E}_{stu}, \mathrm{F}_{stu}) = \sigma(\mathrm{BB}_{1s}, \mathrm{CC}_{2t}, \mathrm{CC}_{1t}, \mathrm{AA}_{2u}, \mathrm{AA}_{1u}, \mathrm{BB}_{2s})$
とする。D_{stu} の型の点が 9 点、E_{stu} の型の点が 9 点そして F_{stu} の型の点が 9 点の計２７点を図示すると以下の図のように成っている。



図からはそのうち 6 点を含む直線が 9 本あり、その直線の 3 本づつが平行に見える。
これから、それに挑戦しよう。

各 $D_{stu}, F_{stu}, F_{stu}$ に対応する複素数を各々 $d_{stu}, e_{stu}, f_{stu}$ で表わすことにしよう。
$D_{stu} = \tau(BB_{1s}, CC_{2t})$, $E_{stu} = \tau(CC_{1t}, AA_{2u})$, $F_{stu} = \tau(AA_{1u}, BB_{2s})$ なので
$D_{231} = \tau(BB_{12}, CC_{23})$, $D_{321} = \tau(BB_{13}, CC_{22})$,
$E_{321} = \tau(CC_{12}, AA_{21})$, $E_{333} = \tau(CC_{13}, AA_{23})$,
$F_{231} = \tau(AA_{11}, BB_{22})$, $F_{333} = \tau(AA_{13}, BB_{23})$ である。



定義 3.1.1 及び式 3.2 より次を得る。

$$\begin{cases} d_{231} = \tau(b, c\gamma_1\omega^2, c, a\alpha_1^2\omega^2) & d_{321} = \tau(b, c\gamma_1\omega, c, a\alpha_1^2\omega) \\ e_{321} = \tau(c, a\alpha_1\omega^2, a, b\beta_1^2) & e_{333} = \tau(c, a\alpha_1\omega, a, b\beta_1^2\omega^2) \\ f_{231} = \tau(a, b\beta_1, b, c\gamma_1^2\omega) & f_{333} = \tau(a, b\beta_1\omega, b, c\gamma_1^2\omega^2) \end{cases} \tag{3.3}$$

この 6 個の複素数が一直線上にあることを示す。その為に一般的な次の補題を用意する。

補題 3.1.3 a, b, c は長さが *1* の異なる複素数として、α, β, γ は長さが *1* の複素数で次が成り立っているとする。
(*)　$\alpha\beta\gamma = \omega, b = a\alpha^3, c = b\beta^3, a = c\gamma^3$
複素数 $d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2$ が次を満たすとする。

$$\begin{cases} d_1 = \tau(b, c\gamma\omega^2, c, a\alpha^2\omega^2) & d_2 = \tau(b, c\gamma\omega, c, a\alpha^2\omega) \\ e_1 = \tau(c, a\alpha\omega^2, a, b\beta^2) & e_2 = \tau(c, a\alpha\omega, a, b\beta^2\omega^2) \\ f_1 = \tau(a, b\beta, b, c\gamma^2\omega) & f_2 = \tau(a, b\beta\omega, b, c\gamma^2\omega^2) \end{cases} \tag{3.4}$$

このとき、 $d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2$ は一直線上にある。

証明　前章 (第 2 章の第**??**節) の式 (2.21 より次を得る。

$$\begin{cases} \tau(b, c\gamma, c, a\alpha^2) = b\beta\gamma(\beta^2 + \beta\omega + \omega^2) - b\beta\omega(\omega + \beta) \\ \tau(c, a\alpha, a, b\beta^2) = b\beta^2((\gamma\omega^2)^2 + \gamma\omega^2 + 1) - b\beta^3\gamma\omega(\omega + \gamma) \\ \tau(a, b\beta, b, c\gamma^2) = b\beta((\beta\gamma)^2 + \beta\gamma + 1) - b\beta\gamma(1 + \beta\gamma) \end{cases} \tag{3.5}$$

を得る。
式 (3.4) をみて、式 (3.5) の (α,β,γ) のところに $(\alpha\omega,\beta,\gamma\omega^2)$ を代入して

$$\begin{cases} d_1 = b\beta\gamma\omega^2(\beta^2+\beta\omega+\omega^2) - b\beta\omega(\omega+\beta) \\ f_1 = b\beta((\beta\gamma\omega^2)^2+\beta\gamma\omega^2+1) - b\beta\gamma\omega^2(1+\beta\gamma\omega^2) \end{cases} \tag{3.6}$$

を得る。また、(α,β,γ) のところに $(\alpha\omega^2,\beta,\gamma\omega)$ を代入して

$$\begin{cases} d_2 = b\beta\gamma\omega(\beta^2+\beta\omega+\omega^2) - b\beta\omega(\omega+\beta) \\ e_1 = b\beta^2(\gamma^2+\gamma+1) - b\beta^3\gamma(1+\gamma) \end{cases} \tag{3.7}$$

を得る。また、(α,β,γ) のところに $(\alpha\omega,\beta\omega,\gamma\omega)$ を代入して

$$\begin{cases} e_2 = b\beta^2\omega^2(\gamma^2+\gamma+1) - b\beta^3\gamma(1+\gamma) \\ f_2 = b\beta\omega((\beta\gamma\omega^2)^2+\beta\gamma\omega^2+1) - b\beta\gamma\omega^2(1+\beta\gamma\omega^2) \end{cases} \tag{3.8}$$

を得る。
$d_1 - d_2 = b\beta\gamma\omega(\omega-1)(\beta^2+\beta\omega+\omega^2)$
である。よって
$\overline{d_1-d_2} = \dfrac{1}{b\beta\gamma\omega} \times (\dfrac{1}{\omega}-1) \times (\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\beta\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}) = \dfrac{-(\omega-1)(\beta^2+\beta\omega+\omega^2)}{b\beta^3\gamma\omega}$
故に

$$\overline{d_1-d_2} = \frac{-(d_1-d_2)}{b^2\beta^4\gamma^2\omega^2} \tag{3.9}$$

同様に
$e_1 - e_2 = b\beta^2\omega^2(\omega-1)(\gamma^2+\gamma+1)$
なので

$$\overline{e_1-e_2} = \frac{-(e_1-e_2)}{\beta^4\gamma^2\omega^2} \tag{3.10}$$

また
$f_1 - f_2 = b\beta(1-\omega)((\beta\gamma\omega^2)^2+\beta\gamma\omega^2+1)$
なので

$$\overline{f_1-f_2} = \frac{-(f_1-f_2)}{\beta^4\gamma^2\omega^2} \tag{3.11}$$

である。
$\overline{e_1} = \dfrac{\gamma^2+\gamma+1}{b\beta^2\gamma^2} - \dfrac{1+\gamma}{b\beta^3\gamma^2}, \overline{d_2} = \dfrac{\beta^2+\beta\omega+\omega^2}{b\beta^3\gamma} - \dfrac{\omega+\beta}{b\beta^2\omega^2}$ なので
$1+\omega+\omega^2 = 0$ に注意して
$e_1 - d_2 + \beta^4\gamma^2\omega^2(\overline{e_1-d_2})$
$= b\beta^2(\gamma^2+\gamma+1) - b\beta^3\gamma(1+\gamma) - b\beta\gamma\omega(\beta^2+\beta\omega+\omega^2) + b\beta\omega(\omega+\beta)$
$+ b\beta^2\omega^2(\gamma^2+\gamma+1) - b\beta\omega^2(\gamma+1) - b\beta\gamma\omega^2(\beta^2+\beta\omega+\omega^2) + b\beta^2\gamma^2(\omega+\beta)$
$= 0$

を得る。 よって

$$\overline{e_1 - d_2} = \frac{-(e_1 - d_2)}{\beta^4\gamma^2\omega^2} \tag{3.12}$$

である。　また

$\beta^4\gamma^2\omega^2\overline{f_1} = b\beta\omega((\beta\gamma\omega^2)^2 + \beta\gamma\omega^2 + 1) - b\beta^2\omega(1 + \beta\gamma\omega^2)$ なので

$$\begin{aligned}
&e_1 - f_1 + \beta^4\gamma^2\omega^2(\overline{f_1 - f_2}) \\
&\quad = b\beta^2(\gamma^2 + \gamma + 1) - b\beta^3\gamma(1+\gamma) - b\beta((\beta\gamma\omega^2)^2 + \beta\gamma\omega^2 + 1) + b\beta\gamma\omega^2(1 + \beta\gamma\omega^2) \\
&\quad\quad + b\beta^2\omega^2(\gamma^2 + \gamma + 1) - b\beta\omega^2(\gamma + 1) \\
&\quad\quad - b\beta\omega((\beta\gamma\omega^2)^2 + \beta\gamma\omega^2 + 1) + b\beta^2\omega(1 + \beta\gamma\omega^2) \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

である。よって

$$\overline{e_1 - f_1} = \frac{-(e_1 - f_1)}{\beta^4\gamma^2\omega^2} \tag{3.13}$$

である。　式 (3.9)~(3.13)

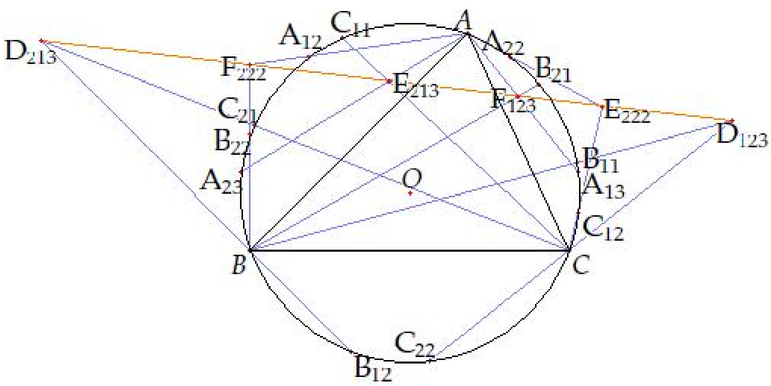
より次を得る。

$$\overline{\left(\frac{d_1 - d_2}{e_1 - e_2}\right)} = \frac{d_1 - d_2}{e_1 - e_2}, \overline{\left(\frac{f_1 - f_2}{e_1 - e_2}\right)} = \frac{f_1 - f_2}{e_1 - e_2}, \overline{\left(\frac{e_1 - d_2}{e_1 - e_2}\right)} = \frac{e_1 - d_2}{e_1 - e_2}, \overline{\left(\frac{e_1 - f_1}{e_1 - e_2}\right)} = \frac{e_1 - f_1}{e_1 - e_2}$$

このことは $d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2$ が一直線上に並んでいることを示している。

補題 3.1.3 を $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$ として適用すると、式 (3.3) の 6 点が同一直線上にあることが分かる。

次に $\mathrm{D}_{123}, \mathrm{D}_{213}, \mathrm{E}_{213}, \mathrm{E}_{222}, \mathrm{F}_{123}, \mathrm{F}_{222}$ の 6 点が同一直線上にあることを示そう。



補題 3.1.3 を $\alpha = \alpha_1\omega, \beta = \beta_1\omega, \gamma = \gamma_1\omega$ として適用すると、次の式の 6 点が同一直線上にあることが分かる。

$$\left\{\begin{array}{l}\tau(b, c\gamma\omega^2, c, a\alpha^2\omega^2)\\ \tau(b, c\gamma\omega, c, a\alpha^2\omega)\\ \tau(c, a\alpha\omega^2, a, b\beta^2)\\ \tau(c, a\alpha\omega, a, b\beta^2\omega^2)\\ \tau(a, b\beta, b, c\gamma^2\omega)\\ \tau(a, b\beta\omega, b, c\gamma^2\omega^2)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\tau(b, c\gamma_1, c, a\alpha_1^2\omega)\\ \tau(b, c\gamma_1\omega^2, c, a\alpha_1^2)\\ \tau(c, a\alpha_1, a, b\beta_1^2\omega^2)\\ \tau(c, a\alpha_1\omega^2, a, b\beta_1^2\omega)\\ \tau(a, b\beta_1\omega, b, c\gamma_1^2)\\ \tau(a, b\beta_1\omega^2, b, c\gamma_1^2\omega)\end{array}\right. \tag{3.14}$$

点がよく見える表現をすると今考えている 6 点が同一直線上にあることが分かる。

$$\left\{\begin{array}{ll}D_{123} = \tau(BB_{11}, CC_{22}) & D_{213} = \tau(BB_{12}, CC_{21})\\ E_{213} = \tau(CC_{11}, AA_{23}) & E_{222} = \tau(CC_{12}, AA_{22})\\ F_{123} = \tau(AA_{13}, BB_{21}) & F_{222} = \tau(AA_{12}, BB_{22})\end{array}\right. \tag{3.15}$$

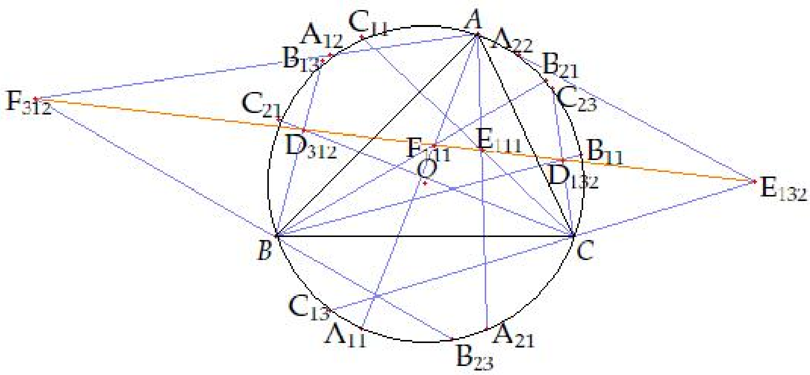
また、式 (3.3),(3.4) を見て $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$ として式 (3.9) を見ると

$$\overline{d_{231} - d_{321}} = \frac{-(d_{231} - d_{321})}{b^2\beta_1^4\gamma_1^2\omega^2} \tag{3.16}$$

を得る。また、式 (3.4),(3.15) をみて $\alpha = \alpha_1\omega, \beta = \beta_1\omega, \gamma = \gamma_1\omega$ として式 (3.9) を見ると

$$\overline{d_{123} - d_{213}} = \frac{-(d_{123} - d_{213})}{b^2\beta_1^4\gamma_1^2\omega^2} \tag{3.17}$$

を得る。
式 (3.16) 及び式 (3.17) より 2 直線 $D_{231}D_{321}$ と $D_{123}D_{213}$ が平行であることが分かる。
次に $D_{312}, D_{132}, E_{132}, E_{111}, F_{312}, F_{111}$ の 6 点が同一直線上にあることを示そう。



補題 3.1.3 を $\alpha = \alpha_1\omega^2, \beta = \beta_1\omega^2, \gamma = \gamma_1\omega^2$ として適用すると、当該の 6 点が同一直線上にあることが分かる。

$$\begin{cases} \tau(b, c\gamma\omega^2, c, a\alpha^2\omega^2) \\ \tau(b, c\gamma\omega, c, a\alpha^2\omega) \\ \tau(c, a\alpha\omega^2, a, b\beta^2) \\ \tau(c, a\alpha\omega, a, b\beta^2\omega^2) \\ \tau(a, b\beta, b, c\gamma^2\omega) \\ \tau(a, b\beta\omega, b, c\gamma^2\omega^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau(b, c\gamma_1\omega, c, a\alpha_1^2) \\ \tau(b, c\gamma_1\omega^2, c, a\alpha_1^2) \\ \tau(c, a\alpha_1\omega, a, b\beta_1^2\omega) \\ \tau(c, a\alpha_1, a, b\beta_1^2) \\ \tau(a, b\beta_1\omega^2, b, c\gamma_1^2\omega^2) \\ \tau(a, b\beta_1, b, c\gamma_1^2) \end{cases} \tag{3.18}$$

点がよく見える表現をすると次の式の 6 点が同一直線上にあることが分かる。

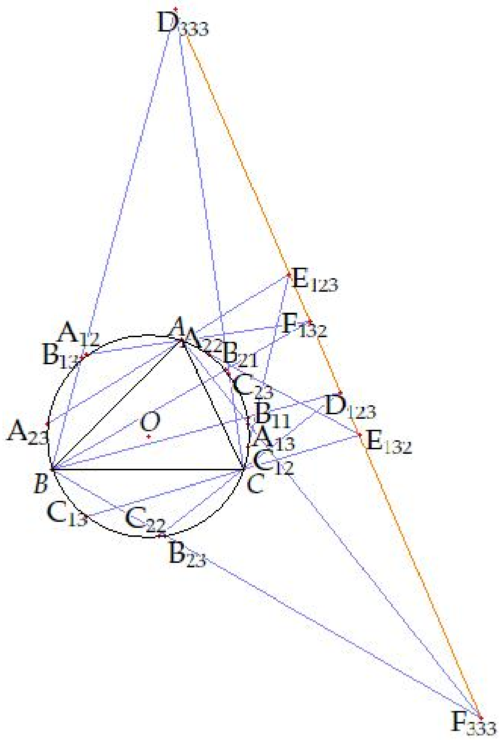
$$\begin{cases} \mathrm{D}_{312} = \tau(\mathrm{BB}_{13}, \mathrm{CC}_{21}) & \mathrm{D}_{132} = \tau(\mathrm{BB}_{11}, \mathrm{CC}_{23}) \\ \mathrm{E}_{132} = \tau(\mathrm{CC}_{13}, \mathrm{AA}_{22}) & \mathrm{E}_{111} = \tau(\mathrm{CC}_{11}, \mathrm{AA}_{21}) \\ \mathrm{F}_{312} = \tau(\mathrm{AA}_{12}, \mathrm{BB}_{23}) & \mathrm{F}_{111} = \tau(\mathrm{AA}_{11}, \mathrm{BB}_{21}) \end{cases} \tag{3.19}$$

式 (3.4),(3.19) をみて $\alpha = \alpha_1\omega^2, \beta = \beta_1\omega^2, \gamma = \gamma_1\omega^2$ として式 (3.9) を見ると

$$\overline{d_{312} - d_{132}} = \frac{-(d_{312} - d_{132})}{b^2\beta_1^4\gamma_1^2\omega^2} \tag{3.20}$$

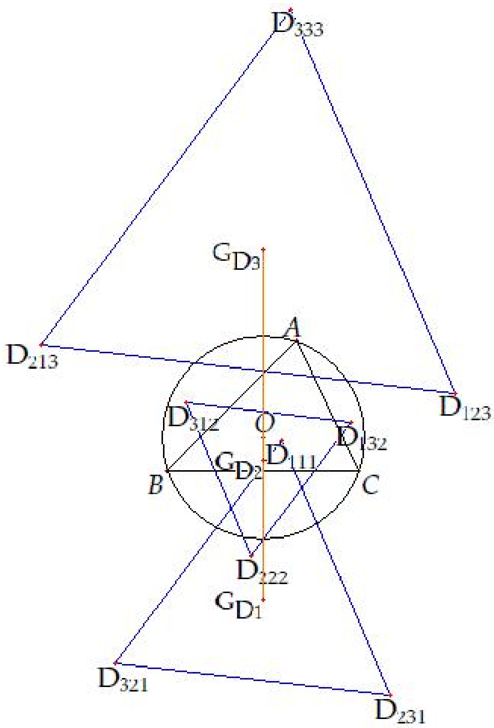
を得る。
式 (3.16) 及び式 (3.21) より 2 直線 $\mathrm{D}_{231}\mathrm{D}_{321}$ と $\mathrm{D}_{312}\mathrm{D}_{132}$ が平行であることが分かる。
補題 3.1.3 に (α, β, γ) に $(\alpha, \beta\omega, \gamma\omega^2)$ や $(\alpha\omega, \beta\omega^2, \gamma)$ や $(\alpha\omega^2, \beta\omega, \gamma\omega)$ を代入して、また $(\alpha, \beta\omega^2, \gamma\omega)$ や $(\alpha\omega^2, \beta\omega, \gamma)$ や $(\alpha\omega, \beta, \gamma\gamma^2)$ を代入して、残りの 6 直線を得る。
$(\alpha, \beta\omega, \gamma\omega^2)$ を代入したもののみを見てみよう。

$$\begin{cases} \tau(b, c\gamma\omega^2, c, a\alpha^2\omega^2) \\ \tau(b, c\gamma\omega, c, a\alpha^2\omega) \\ \tau(c, a\alpha\omega^2, a, b\beta^2) \\ \tau(c, a\alpha\omega, a, b\beta^2\omega^2) \\ \tau(a, b\beta, b, c\gamma^2\omega) \\ \tau(a, b\beta\omega, b, c\gamma^2\omega^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau(b, c\gamma_1\omega, c, a\alpha_1^2\omega^2) \\ \tau(b, c\gamma_1, c, a\alpha_1^2\omega) \\ \tau(c, a\alpha_1\omega^2, a, b\beta_1^2\omega^2) \\ \tau(c, a\alpha_1\omega, a, b\beta_1^2\omega) \\ \tau(a, b\beta_1\omega, b, c\gamma_1^2\omega^2) \\ \tau(a, b\beta_1\omega^2, b, c\gamma_1^2) \end{cases} \tag{3.21}$$



点がよく見える表現をすると次の式の６点が同一直線上にあることが分かる。

$$\begin{cases} D_{333} = \tau(BB_{13}, CC_{23}) \\ D_{123} = \tau(BB_{11}, CC_{22}) \\ E_{123} = \tau(CC_{12}, AA_{23}) \\ E_{132} = \tau(CC_{13}, AA_{22}) \\ F_{333} = \tau(AA_{13}, BB_{23}) \\ F_{132} = \tau(AA_{12}, BB_{21}) \end{cases} \tag{3.22}$$



D_{stu} の型の９点は図のように３点づつで３つの正三角形を成す。

$\triangle D_{111}D_{321}D_{231}$,

$\triangle D_{222}D_{132}D_{312}$,

$\triangle D_{333}D_{213}D_{123}$

各々の重心をそれぞれ

$G_{D_1}, G_{D_2}, G_{D_3}$ とおく。

このとき次が成り立つ。

定理 3.1.4

上の記号の下次が成り立つ。

(1) $G_{D_1}, G_{D_2}, G_{D_3}$

は BC の垂直二等分線上にある。

(2) $OG_{D_3}, OG_{D_1}, OG_{D_2}$の最も長いものは

残りの和に等しい。

証明 $D_{stu} = \tau(BB_{1s}, CC_{2t})$ である。つまり次が成り立つ。

$D_{111}=\tau(BB_{11},CC_{21})$	$D_{321}=\tau(BB_{13},CC_{22})$	$D_{231}=\tau(BB_{12},CC_{23})$
$D_{222}=\tau(BB_{12},CC_{22})$	$D_{132}=\tau(BB_{11},CC_{23})$	$D_{312}=\tau(BB_{13},CC_{21})$
$D_{333}=\tau(BB_{13},CC_{23})$	$D_{213}=\tau(BB_{13},CC_{21})$	$D_{123}=\tau(BB_{11},CC_{22})$

D_{stu} に対応する複素数を d_{stu} で表わすと、B_{11}, B_{12}, B_{13}, C_{11}, C_{12}, C_{13} それぞれに対応する複素数は $c\gamma_1, c\gamma_1\omega^2, c\gamma_1\omega, a\alpha_1, a\alpha_1\omega^2, a\alpha_1\omega$ なので次の表を得る。

$d_{111}=\tau(b,c\gamma_1,c,a\alpha_1^2)$	$d_{321}=\tau(b,c\gamma_1\omega,c,a\alpha_1^2\omega)$	$d_{231}=\tau(b,c\gamma_1\omega^2,c,a\alpha_1^2\omega^2)$
$d_{222}=\tau(b,c\gamma_1\omega^2,c,a\alpha_1^2\omega)$	$d_{132}=\tau(b,c\gamma_1,c,a\alpha_1^2\omega^2)$	$d_{312}=\tau(b,c\gamma_1\omega,c,a\alpha_1^2)$
$d_{333}=\tau(b,c\gamma_1\omega,c,a\alpha_1^2\omega^2)$	$d_{213}=\tau(b,c\gamma_1\omega^2,c,a\alpha_1^2)$	$d_{123}=\tau(b,c\gamma_1,c,a\alpha_1^2\omega)$

前章 (第 2 章の第**??**節) 補題 2.3.3 より

(*) $\alpha\beta\gamma=\omega, b=a\alpha^3, c=b\beta^3, a=c\gamma^3$

の条件の下

$$\tau(b,c\gamma,c,a\alpha^2)=b(\beta^3\gamma+\beta^2\gamma\omega+\beta\gamma\omega^2-\beta\omega^2-\beta^2\omega) \tag{3.23}$$

であった

(α,β,γ) に $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $(\alpha_1\omega^2,\beta_1,\gamma_1\omega)$, $(\alpha_1\omega,\beta_1,\gamma_1\omega^2)$ をそれぞれ代入して

$$\begin{cases} d_{111}=b(\beta_1^3\gamma+\beta_1^2\gamma_1\omega+\beta_1\gamma_1\omega^2-\beta_1\omega^2-\beta_1^2\omega) \\ d_{321}=b(\beta_1^3\gamma\omega+\beta_1^2\gamma_1\omega^2+\beta_1\gamma_1-\beta_1\omega^2-\beta_1^2\omega) \\ d_{231}=b(\beta_1^3\gamma\omega^2+\beta_1^2\gamma_1+\beta_1\gamma_1\omega-\beta_1\omega^2-\beta_1^2\omega) \end{cases} \tag{3.24}$$

よって

$$g_{D_1}=\frac{d_{111}+d_{321}+d_{231}}{3}=-b(\beta_1\omega^2+\beta_1^2\omega) \tag{3.25}$$

(α,β,γ) に $(\alpha_1\omega^2,\beta_1\omega^2,\gamma_1\omega^2)$, $(\alpha_1\omega,\beta_1\omega^2,\gamma_1)$, $(\alpha_1,\beta_1\omega^2,\gamma_1\omega)$ をそれぞれ代入して

$$\begin{cases} d_{222}=b(\beta_1^3\gamma\omega^2+\beta_1^2\gamma_1\omega+\beta_1\gamma_1-\beta_1\omega-\beta_1^2\omega^2) \\ d_{132}=b(\beta_1^3\gamma+\beta_1^2\gamma_1\omega^2+\beta_1\gamma_1-\beta_1\omega-\beta_1^2\omega^2) \\ d_{312}=b(\beta_1^3\gamma\omega+\beta_1^2\gamma_1+\beta_1\gamma_1\omega^2-\beta_1\omega-\beta_1^2\omega^2) \end{cases} \tag{3.26}$$

よって

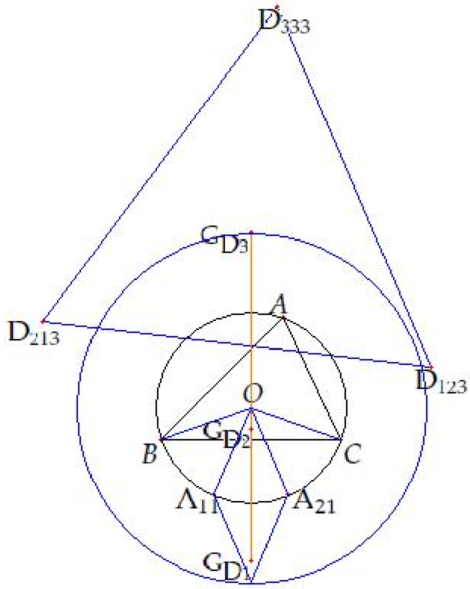
$$g_{D_2}=\frac{d_{222}+d_{132}+d_{312}}{3}=-b(\beta_1\omega+\beta_1^2\omega^2) \tag{3.27}$$

(α,β,γ) に $(\alpha_1\omega,\beta_1\omega,\gamma_1\omega)$, $(\alpha_1,\beta_1\omega,\gamma_1\omega^2)$, $(\alpha_1\omega^2,\beta_1\omega,\gamma_1)$ をそれぞれ代入して

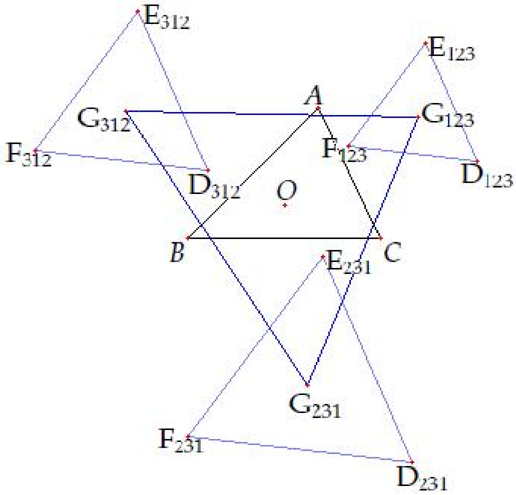
$$\begin{cases} d_{333}=b(\beta_1^3\gamma\omega+\beta_1^2\gamma_1\omega+\beta_1\gamma_1\omega-\beta_1-\beta_1^2) \\ d_{213}=b(\beta_1^3\gamma\omega^2+\beta_1^2\gamma_1\omega^2+\beta_1\gamma_1\omega^2-\beta_1-\beta_1^2) \\ d_{123}=b(\beta_1^3\gamma+\beta_1^2\gamma_1+\beta_1\gamma_1-\beta_1-\beta_1^2) \end{cases} \tag{3.28}$$

よって

$$g_{D_3}=\frac{d_{333}+d_{213}+d_{123}}{3}=-b(\beta_1+\beta_1^2) \tag{3.29}$$



$\angle \mathrm{BOA}_{11} = \angle \mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{21} = \angle \mathrm{A}_{21}\mathrm{OC}$ であり
$\mathrm{A}_{11}, \mathrm{A}_{21}$ に対応する複素数は
各々 $b\beta_1, b\beta_1^2$ なので
0 と $b(\beta_1 + \beta_1^2)$ を結ぶ直線は
b と c を結ぶ直線を垂直二等分している。
従って、式 (3.29) は
$\mathrm{G}_{\mathrm{D}_3}$ が BC の垂直二等分線上にあることを示している。
同様に、式 (3.25),(3.27) は
$\mathrm{G}_{\mathrm{D}_1}, \mathrm{G}_{\mathrm{D}_2}$ が BC の垂直二等分線上にあることを示している。



各 (s,t,u) に対して、正三角形 $\triangle \mathrm{D}_{stu}\mathrm{E}_{stu}\mathrm{F}_{stu}$ の重心を G_{stu} とおくことにすると次が成り立つ。

定理 3.1.5
正三角形 $\triangle G_{123}G_{312}G_{231}$ の重心は $\triangle ABC$ の外心と一致する。

証明 補題 3.1.1 で示したように
a, b, c は長さが 1 の異なる複素数として、α, β, γ は長さが 1 の複素数で
(*) $\alpha\beta\gamma = \omega, b = a\alpha^3, c = b\beta^3, a = c\gamma^3$
を満たしているとき
$\sigma(b, c\gamma, c, a\alpha^2, c, a\alpha, a, b\beta^2, a, b\beta, b, c\gamma^2)$
は反時計回りに正三角形をなし、頂点に対応する複素数は, 式 (3.5) により

$$\begin{cases} \tau(b, c\gamma, c, a\alpha^2) = b\beta\gamma(\beta^2 + \beta\omega + \omega^2) - b\beta\omega(\omega + \beta) \\ \tau(c, a\alpha, a, b\beta^2) = b\beta^2((\gamma\omega^2)^2 + \gamma\omega^2 + 1) - b\beta^3\gamma\omega(\omega + \gamma) \\ \tau(a, b\beta, b, c\gamma^2) = b\beta((\beta\gamma)^2 + \beta\gamma + 1) - b\beta\gamma(1 + \beta\gamma) \end{cases}$$

であった。整頓して

$$\begin{cases} \tau(b, c\gamma, c, a\alpha^2) = b(\beta^3\gamma + \beta^2\gamma\omega + \beta\gamma\omega^2 - \beta^2\omega - \beta\omega^2) \\ \tau(c, a\alpha, a, b\beta^2) = b(\beta^2\gamma^2\omega + \beta^2\gamma\omega^2 + \beta^2 - \beta^3\gamma^2\omega - \beta^3\gamma\omega^2) \\ \tau(a, b\beta, b, c\gamma^2) = b(\beta^3\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta - \beta^2\gamma^2 - \beta\gamma) \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\begin{cases} (d_{123}, e_{123}, f_{123}) = \tau(b, c\gamma_1, c, a\alpha_1^2\omega, c, a\alpha_1\omega^2, a, b\beta_1^2\omega^2, a, a\beta_1\omega, b, c\gamma_1^2) \\ (d_{231}, e_{231}, f_{231}) = \tau(b, c\gamma_1\omega^2, c, a\alpha_1^2\omega^2, c, a\alpha_1\omega, a, b\beta_1^2, a, a\beta_1, b, c\gamma_1^2\omega) \\ (d_{312}, e_{312}, f_{312}) = \tau(b, c\gamma_1\omega, c, a\alpha_1^2, c, a\alpha_1, a, b\beta_1^2\omega, a, a\beta_1\omega^2, b, c\gamma_1^2\omega^2) \end{cases}$$

なので、式 (3.30) の (α, β, γ) に
$(\alpha_1\omega^2, \beta_1\omega, \gamma_1), (\alpha_1\omega, \beta_1, \gamma_1\omega^2), (\alpha_1, \beta_1\omega^2, \gamma_1\omega)$ をそれぞれ代入して

$$\begin{cases} d_{123} = b(\beta_1^3\gamma_1 + \beta_1^2\gamma_1 + \beta_1\gamma_1 - \beta_1^2 - \beta_1) \\ e_{123} = b(\beta_1^2\gamma_1^2 + \beta_1^2\gamma_1\omega + \beta_1^2\omega^2 - \beta_1^3\gamma_1^2\omega - \beta_1^3\gamma_1\omega^2) \\ f_{123} = b(\beta_1^3\gamma_1^2 + \beta_1^2\gamma_1\omega^2 + \beta_1\omega - \beta_1^2\gamma_2^2\omega^2 - \beta_1\gamma_1\omega) \\ d_{231} = b(\beta_1^3\gamma_1\omega^2 + \beta_1^2\gamma_1 + \beta_1\gamma_1\omega - \beta_1^2\omega - \beta_1\omega^2) \\ e_{231} = b(\beta_1^2\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1^2\gamma_1\omega + \beta_1^2 - \beta_1^3\gamma_1^2\omega^2 - \beta_1^3\gamma_1\omega) \\ f_{231} = b(\beta_1^3\gamma_1^2\omega + \beta_1^2\gamma_1\omega^2 + \beta_1 - \beta_1^2\gamma_1^2\omega - \beta_1\gamma_1\omega^2) \\ d_{312} = b(\beta_1^3\gamma_1\omega + \beta_1^2\gamma_1 + \beta_1\gamma_1\omega^2 - \beta_1^2\omega^2 - \beta\omega) \\ e_{312} = b(\beta_1^2\gamma_1^2\omega + \beta_1^2\gamma_1\omega + \beta_1^2\omega - \beta_1^3\gamma_1^2 - \beta_1^3\gamma_1) \\ f_{312} = b(\beta_1^3\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1^2\gamma_1\omega^2 + \beta_1\omega^2 - \beta_1^2\gamma_1^2 - \beta_1\gamma_1) \end{cases} \tag{3.31}$$

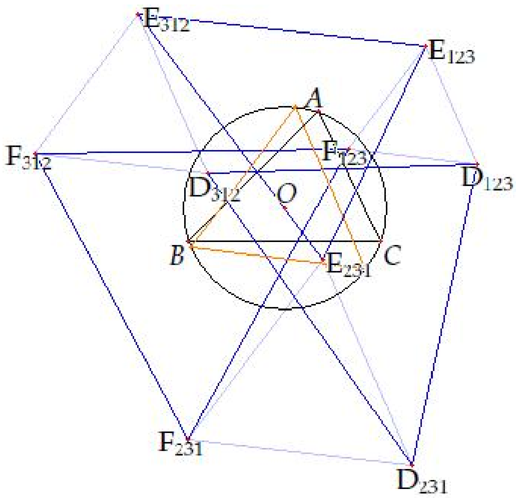
これより、次を得る。

$$\begin{cases} d_{123} + d_{231} + d_{312} = 3b\beta_1^2\gamma_1 \\ e_{123} + e_{231} + e_{312} = 3b\beta_1^2\gamma_1\omega \\ f_{123} + f_{231} + f_{312} = 3b\beta_1^2\gamma_1\omega \end{cases} \tag{3.32}$$

G_{stu} に対応する複素数を g_{stu} とおくと

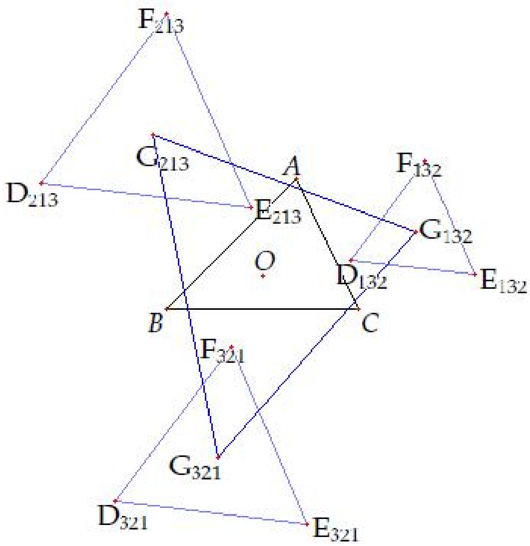
$$\frac{g_{123} + g_{231} + g_{312}}{3} = \frac{d_{123} + e_{123} + f_{123} + d_{231} + e_{231} + f_{231} + d_{312} + e_{312} + f_{312}}{9}$$
$$= \frac{\beta_1^2\gamma(1 + \omega + \omega^2)}{3} = 0$$

よって $\triangle \mathrm{G}_{123}\mathrm{G}_{312}\mathrm{G}_{231}$ の重心に対応する複素数は 0 である。



系 3.1.6 $\triangle D_{123}D_{312}D_{231}$, $\triangle E_{123}E_{312}E_{231}$, $\triangle F_{123}F_{312}F_{231}$ の重心は $\triangle ABC$ の外接円上にあり、正三角形をなす。

証明 三つの三角形の重心に対応する複素数は式 (3.32) よりそれぞれ $b\beta_1^2\gamma_1, b\beta_1^2\gamma_1\omega, b\beta_1^2\gamma_1\omega^2$ である。これらは単位円上にあり正三角形をなす。



定理 3.1.5 と同じ形の次もなりたつ

類題 3.1.7
正三角形 $\triangle G_{132}G_{213}G_{321}$ の重心は $\triangle ABC$ の外心と一致する。

$$\begin{cases} (d_{132}, e_{132}, f_{132}) = \tau(b, c\gamma_1, c, a\alpha_1^2\omega^2, c, a\alpha_1\omega, a, b\beta_1^2\omega, a, a\beta_1\omega^2, b, c\gamma_1^2) \\ (d_{213}, e_{213}, f_{213}) = \tau(b, c\gamma_1\omega^2, c, a\alpha_1^2, c, a\alpha_1, a, b\beta_1^2\omega^2, a, a\beta_1\omega, b, c\gamma_1^2\omega) \\ (d_{321}, e_{321}, f_{321}) = \tau(b, c\gamma_1\omega, c, a\alpha_1^2\omega, c, a\alpha_1\omega^2, a, b\beta_1^2, a, a\beta_1, b, c\gamma_1^2\omega^2) \end{cases}$$

なので、式 (3.30) の (α, β, γ) に
$(\alpha_1\omega, \beta_1\omega^2, \gamma_1), (\alpha_1, \beta_1\omega, \gamma_1\omega^2), (\alpha_1\omega^2, \beta_1, \gamma_1\omega)$ をそれぞれ代入して

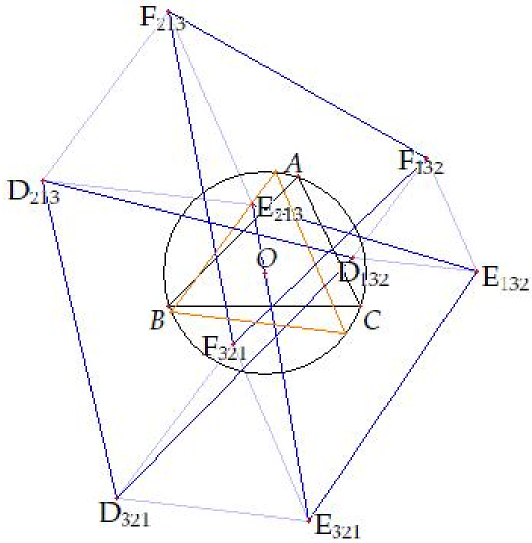
$$\begin{cases} d_{132} = b(\beta_1^3\gamma_1 + \beta_1^2\gamma_1\omega^2 + \beta_1\gamma_1\omega - \beta_1^2\omega^2 - \beta_1\omega) \\ e_{132} = b(\beta_1^2\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1^2\gamma_1 + \beta_1^2\omega - \beta_1^3\gamma_1^2\omega - \beta_1^3\gamma_1\omega^2) \\ f_{132} = b(\beta_1^3\gamma_1^2 + \beta_1^2\gamma_1\omega + \beta_1\omega^2 - \beta_1^2\gamma_1^2\omega - \beta_1\gamma_1\omega^2) \\ d_{213} = b(\beta_1^3\gamma_1\omega^2 + \beta_1^2\gamma_1\omega^2 + \beta_1\gamma_1\omega^2 - \beta_1^2 - \beta_1) \\ e_{213} = b(\beta_1^2\gamma_1^2\omega + \beta_1^2\gamma_1 + \beta_1^2\omega^2 - \beta_1^3\gamma_1^2\omega^2 - \beta_1^3\gamma_1\omega) \\ f_{213} = b(\beta_1^3\gamma_1^2\omega + \beta_1^2\gamma_1\omega + \beta_1\omega - \beta_1^2\gamma_1^2 - \beta_1\gamma_1) \\ d_{321} = b(\beta_1^3\gamma_1\omega + \beta_1^2\gamma_1\omega^2 + \beta_1\gamma_1 - \beta_1^2\omega - \beta_1\omega^2) \\ e_{321} = b(\beta_1^2\gamma_1^2 + \beta_1^2\gamma_1 + \beta_1^2 - \beta_1^3\gamma_1^2 - \beta_1^3\gamma_1) \\ f_{321} = b(\beta_1^3\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1^2\gamma_1\omega + \beta_1 - \beta_1^2\gamma_1^2\omega^2 - \beta_1\gamma_1\omega) \end{cases} \tag{3.33}$$

を得る。これより、次を得る。

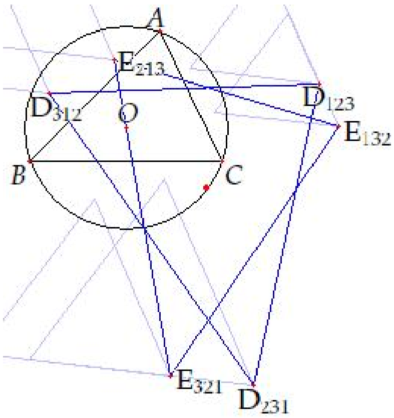
$$\begin{cases} d_{132} + d_{213} + d_{321} = 3b\beta_1^2\gamma_1\omega^2 \\ e_{132} + e_{213} + e_{321} = 3b\beta_1^2\gamma_1 \\ f_{132} + f_{213} + f_{321} = 3b\beta_1^2\gamma_1\omega \end{cases} \tag{3.34}$$

よって、定理 3.1.5 の証明と同様に類題も証明された。

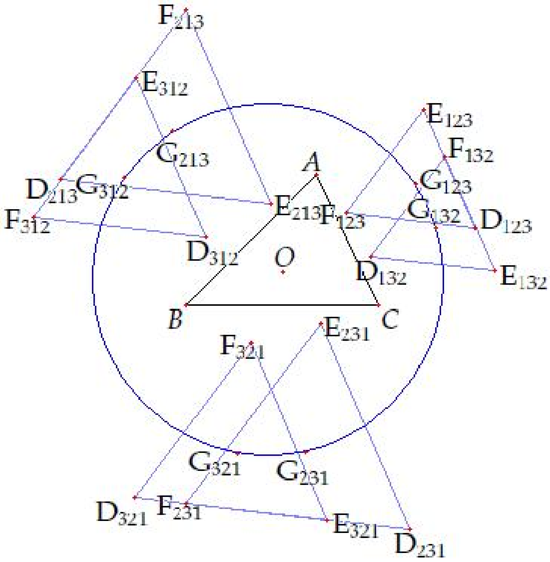
式 (3.32) と (**??**) より、次の系を得る。



系 3.1.8 $\triangle D_{132}D_{213}D_{321}$, $\triangle E_{132}E_{213}E_{321}$, $\triangle F_{132}F_{213}F_{321}$ の重心は $\triangle ABC$ の外接円上にあり、正三角形をなす。



系 3.1.9 $\triangle D_{123}D_{312}D_{231}$ の重心と
$\triangle E_{132}E_{213}E_{321}$ の重心とは一致する。
$\triangle E_{123}E_{312}E_{231}$ の重心と
$\triangle F_{132}F_{213}F_{321}$ の重心とは一致する。
$\triangle F_{123}F_{312}F_{231}$ の重心と
$\triangle D_{132}D_{213}D_{321}$ の重心とは一致する。



定理 3.1.10 ６個の正三角形の重心たち
G_{123}, G_{231}, G_{312}, G_{132}, G_{213}, G_{321}
は同一円周上にある。

定理と言ってますが証明は未だしていません。図から言って正しそうなのですが。

以下はしばらくメモです

$$
\left\{
\begin{aligned}
d_{123}+e_{123}+f_{123} = \;& b(\beta_1^3\gamma_1^2(1-\omega)+\beta_1^3\gamma_1(1-\omega^2)+\beta_1^2\gamma_1^2(1-\omega^2)\\
&+\beta_1\gamma_1(1-\omega)-\beta_1^2(1-\omega^2)-\beta_1(1-\omega))\\
d_{231}+e_{231}+f_{231} = \;& b(\beta_1^3\gamma_1^2(\omega-\omega^2)+\beta_1^3\gamma_1(\omega^2-\omega)+\beta_1^2\gamma_1^2(\omega^2-\omega)\\
&+\beta_1\gamma_1(\omega-\omega^2)-\beta_1^2(\omega-1)-\beta_1(\omega^2-1))\\
d_{312}+e_{312}+f_{312} = \;& b(\beta_1^3\gamma_1^2(\omega^2-1)+\beta_1^3\gamma_1(\omega-1)+\beta_1^2\gamma_1^2(\omega-1)\\
&+\beta_1\gamma_1(\omega^2-1)-\beta_1^2(\omega^2-\omega)-\beta_1(\omega-\omega^2))\\
d_{132}+e_{132}+f_{132} = \;& b(\beta_1^3\gamma_1^2(1-\omega)+\beta_1^3\gamma_1(1-\omega^2)+\beta_1^2\gamma_1^2(\omega^2-\omega)\\
&+\beta_1\gamma_1(\omega-\omega^2)-\beta_1^2(\omega^2-\omega)-\beta_1(\omega-\omega^2))\\
d_{213}+e_{213}+f_{213} = \;& b(\beta_1^3\gamma_1^2(\omega-\omega^2)+\beta_1^3\gamma_1(\omega^2-\omega)+\beta_1^2\gamma_1^2(\omega-1)\\
&+\beta_1\gamma_1(\omega^2-1)-\beta_1^2(1-\omega^2)-\beta_1(1-\omega))\\
d_{321}+e_{321}+f_{321} = \;& b(\beta_1^3\gamma_1^2(\omega^2-1)+\beta_1^3\gamma_1(\omega-1)+\beta_1^2\gamma_1^2(1-\omega^2)\\
&+\beta_1\gamma_1(1-\omega)-\beta_1^2(\omega-1)-\beta_1(\omega^2-1))
\end{aligned}
\right.
\tag{3.35}
$$

$h_{stu} = \dfrac{d_{stu} + e_{stu} + f_{stu}}{b(1-\omega)}$ とおくと、次が成り立つ。

$$\begin{cases} h_{123} = \beta_1^3\gamma_1^2 - \beta_1^3\gamma_1\omega^2 - \beta_1^2\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1\gamma_1 + \beta_1^2\omega^2 - \beta_1 \\ h_{231} = \beta_1^3\gamma_1^2\omega - \beta_1^3\gamma_1\omega - \beta_1^2\gamma_1^2\omega + \beta_1\gamma_1\omega + \beta_1^2 - \beta_1\omega^2 \\ h_{312} = \beta_1^3\gamma_1^2\omega^2 - \beta_1^3\gamma_1 - \beta_1^2\gamma_1^2 + \beta_1\gamma_1\omega^2 + \beta_1^2\omega - \beta_1\omega \\ h_{132} = \beta_1^3\gamma_1^2 - \beta_1^3\gamma_1\omega^2 - \beta_1^2\gamma_1^2\omega + \beta_1\gamma_1\omega + \beta_1^2\omega - \beta_1\omega \\ h_{213} = \beta_1^3\gamma_1^2\omega - \beta_1^3\gamma_1\omega - \beta_1^2\gamma_1^2 + \beta_1\gamma_1\omega^2 + \beta_1^2\omega^2 - \beta_1 \\ h_{321} = \beta_1^3\gamma_1^2\omega^2 - \beta_1^3\gamma_1 - \beta_1^2\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1\gamma_1 + \beta_1^2 - \beta_1\omega^2 \end{cases} \tag{3.36}$$

従って

$$\begin{cases} h_{123} - h_{132} = (\beta_1^2\gamma_1^2\omega + \beta_1\gamma_1 - \beta_1^2\omega - \beta_1)(1-\omega) \\ h_{231} - h_{132} = (-\beta_1^3\gamma_1^2 - \beta_1^3\gamma_1\omega + \beta_1^2 + \beta_1\omega)(1-\omega) \\ h_{312} - h_{132} = (\beta_1^3\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1^3\gamma_1\omega^2 - \beta_1^2\gamma_1^2 - \beta_1\gamma_1\omega)(1-\omega) \\ h_{123} - h_{213} = (\beta_1^3\gamma_1^2 + \beta_1^3\gamma^1\omega - \beta_1^2\gamma_1^2\omega^2 - \beta_1\gamma_1\omega^2)(1-\omega) \\ h_{231} - h_{213} = (\beta_1^2\gamma_1^2 + \beta_1\gamma_1\omega - \beta_1^2\omega^2 - \beta_1\omega^2)(1-\omega) \\ h_{312} - h_{213} = (-\beta_1^3\gamma_1^2\omega - \beta_1^3\gamma_1 + \beta_1^2\omega + \beta_1)(1-\omega) \end{cases} \tag{3.37}$$

$\kappa = \dfrac{h_{123} - h_{132}}{\beta_1(1-\omega)}, \lambda = \dfrac{h_{231} - h_{132}}{\beta_1(1-\omega)}, \mu = \dfrac{h_{312} - h_{132}}{\beta_1(1-\omega)}$ とおくと次を得る。

$$\begin{cases} \kappa = \beta_1\gamma_1^2\omega + \gamma_1 - \beta_1\omega - 1 \\ \lambda = -\beta_1^2\gamma_1^2 - \beta_1^2\gamma_1\omega + \beta_1 + \omega \\ \mu = \beta_1^2\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1^2\gamma_1\omega^2 - \beta_1\gamma_1^2 - \gamma_1\omega \end{cases} \tag{3.38}$$

よって、共役をとって

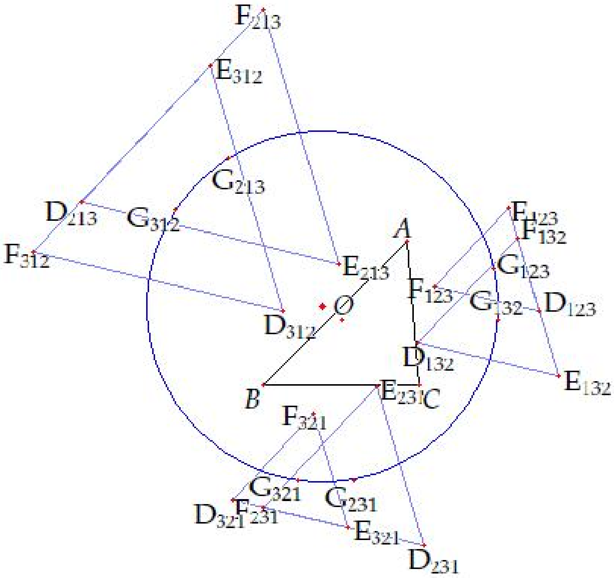
$$\overline{\kappa} = \frac{1}{\beta_1\gamma_1^2\omega} + \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\beta_1\omega} - 1 = \frac{\omega^2 + \beta_1\gamma_1 - \gamma_1^2\omega^2 - \beta_1\gamma_1^2}{\beta_1\gamma_1^2}$$

$$\overline{\lambda} = -\frac{1}{\beta_1^2\gamma_1^2} - \frac{1}{\beta_1^2\gamma_1\omega} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\omega} = \frac{-1 - \gamma_1\omega^2 + \beta_1\gamma_1^2 + \beta_1^2\gamma_1^2\omega^2}{\beta_1^2\gamma_1^2}$$

$$\overline{\mu} = \frac{1}{\beta_1^2\gamma_1^2\omega^2} + \frac{1}{\beta_1^2\gamma_1\omega^2} - \frac{1}{\beta_1\gamma_1^2} - \frac{1}{\gamma_1\omega} = \frac{\omega + \gamma_1\omega - \beta_1 - \beta_1^2\gamma_1\omega^2}{\beta_1^2\gamma_1^2}$$

以上まとめて、次を得る。

$$\begin{cases} \beta_1^2\gamma_1^2\overline{\kappa} = -\beta_1^2\gamma_1^2 - \beta_1\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1^2\gamma_1 + \beta_1\omega^2 \\ \beta_1^2\gamma_1^2\overline{\lambda} = \beta_1^2\gamma_1^2\omega^2 + \beta_1\gamma_1^2 - \gamma_1\omega^2 - 1 \\ \beta_1^2\gamma_1^2\overline{\mu} = -\beta_1^2\gamma_1\omega^2 - \beta_1 + \gamma_1\omega + \omega \end{cases} \tag{3.39}$$



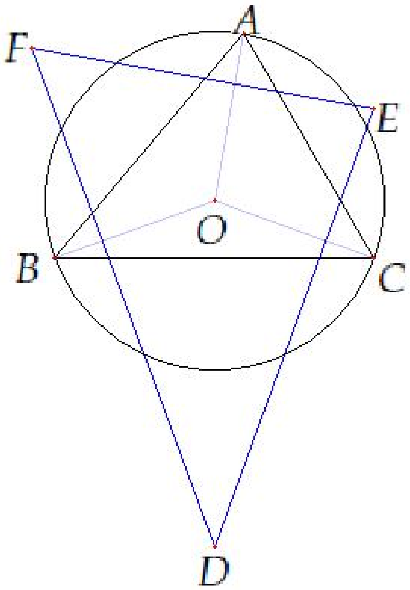
△ABC の形を変えても９個の重心が同一円周上にあるように見えます

ここまでメモです

工事中

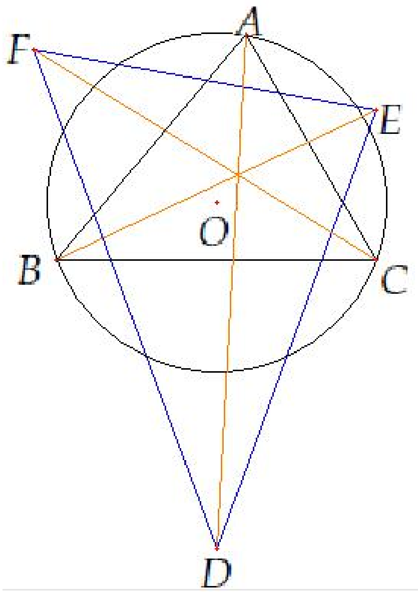
3.2　コスニカの定理の拡張

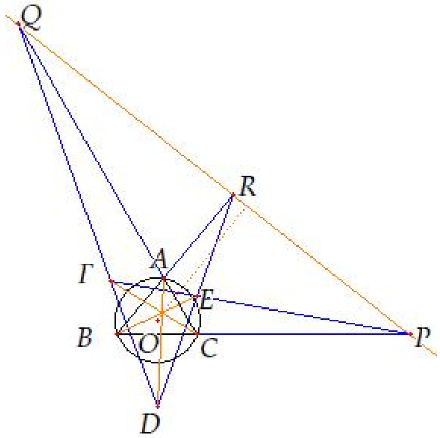
大竹博巳先生からコスニカの定理がもっと一般化できるとの示唆を受けました。ここではその一般化を紹介します。



この節では図のように O は △ABC の外心とする。
EF, FD, DA は各々 OA, OB, OC と直交し O からの距離がみな △ABC の外接円の半径の s 倍とする。

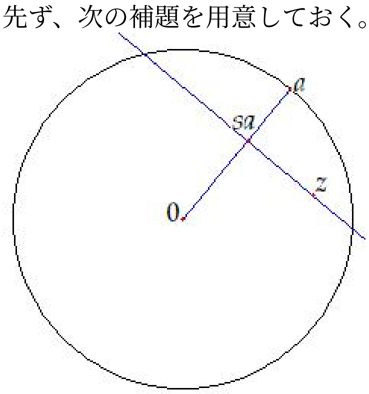
$s = \dfrac{1}{2}$ の時がオリジナルなコスニカの定理の状況である。





定理 3.2.1 *(コスニタの定理の拡張)*
上記の条件のもと次が成り立つ。
(1)　AD, BD, CD は一点で交わる。
(2)　BC と EF との交点を P, CA と FD との交点を Q とし AB と DE との交点を R とするとき
　　P, Q, R は一直線上にある。
(3) O から *(2)* の直線に下ろした垂線は *(1)* の交点を通る

先ず、次の補題を用意しておく。



補題 3.2.2 a を単位円周上に点とする。s を実数とする。sa を通り 0 と a を結ぶ直線に直交する直線上に z があるとき、次が成り立つ。

$$z + a^2\overline{z} = 2sa \tag{3.40}$$

補題の証明　$\dfrac{z-sa}{a}$ が純虚数で $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$ なので
$\overline{z-saa} = -(z-sa)\overline{a}$
これを変更して
$(z - \dfrac{s}{a})a = -\dfrac{z-sa}{a}$ これより求める式を得る。

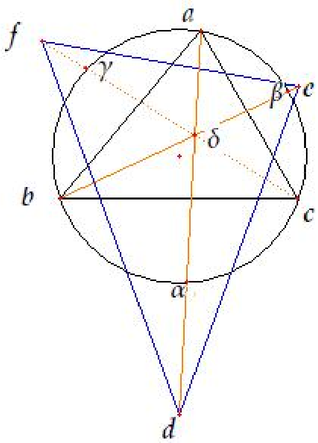
定理 3.2.1 **の証明**

適当に座標を入れて △ABC の外接円が単位円となるようにする。A, B, C, D, E, F, P, Q, R に対応する複素数を各々$a, b, c, d, e, f, p, q, r$ とする。また $t = 2s$ とする。補題 3.2.2 より、d について次が成り立つ。

$$\begin{cases} d - b^2\overline{d} = tb \\ d - c^2\overline{d} = tc \end{cases} \tag{3.41}$$

これを解いて

$$\overline{d} = \frac{t}{b+c},\ d = \frac{tbc}{b+c} \tag{3.42}$$



a と d を結ぶ直線が単位円と再び交わる点を α とおくと

$d + a\alpha\overline{d} = a + \alpha$

これと式 (3.42) より、$a\overline{d} - 1 \neq 0$ に注意して

$$\alpha = \frac{a-d}{a\overline{d}-1} = \frac{ab+ca-tbc}{ta-b-c} \tag{3.43}$$

よって、次を得る。

$$b - \alpha = \frac{-b^2 + tb(c+a) - (ab+bc+ca)}{ta-b-c},$$

$$\alpha - c = \frac{c^2 - tc(a+b) + (ab+bc+ca)}{ta-b-c}$$

b と e を結ぶ直線が単位円と再び交わる点を β とおき
c と f を結ぶ直線が単位円と再び交わる点を γ と置くと
上と同様な議論をして、次の結果を得る。

$$\begin{cases} b - \alpha = \dfrac{-b^2 + tb(c+a) - (ab+bc+ca)}{ta-b-c} & \alpha - c = \dfrac{c^2 - tc(a+b) + (ab+bc+ca)}{ta-b-c} \\ c - \beta = \dfrac{-c^2 + tc(a+b) - (ab+bc+ca)}{tb-c-a} & \beta - a = \dfrac{a^2 - ta(b+c) + (ab+bc+ca)}{tb-c-a} \\ a - \gamma = \dfrac{-a^2 + ta(b+c) - (ab+bc+ca)}{tc-a-b} & \gamma - b = \dfrac{b^2 - tb(c+a) + (ab+bc+ca)}{tc-a-b} \end{cases} \tag{3.44}$$

これより $(a-\gamma)(b-\alpha)(c-\beta) + (\gamma-b)(\alpha-c)(\beta-a) = 0$ を得る。定理 2.4.1(チェバ型の定理) より AD, BE, CF が一点でまじわることが分かる。つまり定理の主張の (1) が示せた。

別解として、チェバ型の定理を利用しないで直接 (1) を示そう。AD と BE との交点に対応する複素数を δ とおくと、δ は次を満たす。

$$\begin{cases} \delta + a\alpha\overline{\delta} = a + \alpha \\ \delta + b\beta\overline{\delta} = b + \beta \end{cases} \tag{3.45}$$

式 (3.43) 及びそれと同様にして、次を得る。

$$\alpha = \frac{ab+ca-tbc}{ta-b-c},\ \beta = \frac{bc+ab-tca}{tb-c-a} \tag{3.46}$$

式 (3.45), 式 (3.46) より次を得る。

$$\begin{cases} (ta-b-c)\delta + a(ab+ca-tbc)\overline{\delta} = t(a^2-bc) \\ (tb-c-a)\delta + b(bc+ab-tca)\overline{\delta} = t(b^2-ca) \end{cases} \tag{3.47}$$

今 $u = t+1, \varepsilon = a+b+c, \eta = ab+bc+ca$ とおくと、式 (3.47) は次のようになる。

$$\begin{cases} (ua-\varepsilon)\delta + a(\eta-ubc)\overline{\delta} = t(a^2-bc) \\ (ub-\varepsilon)\delta + b(\eta-uca)\overline{\delta} = t(b^2-ca) \end{cases} \tag{3.48}$$

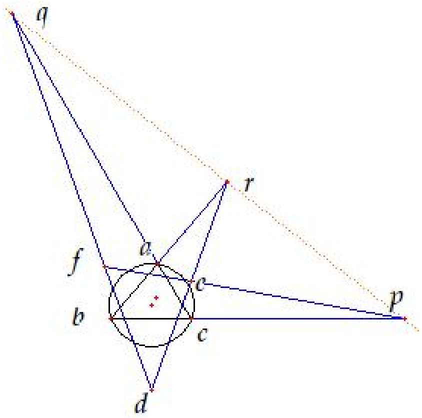
$$(ua-\varepsilon)b(\eta-uca) - (ub-\varepsilon)a(\eta-ubc) = (b-a)(u^2abc-\varepsilon\eta)$$
$$t(a^2-bc)b(\eta-uca) - t(b^2-ca)a(\eta-ubc) = (b-a)t(uabc\varepsilon-\eta^2)$$

なので

$$\delta = \frac{t(uabc\varepsilon-\eta^2)}{u^2abc-\varepsilon\eta} = \frac{t((t+1)abc(a+b+c)-(ab+bc+ca)^2)}{(t+1)^2abc-(a+b+c)(ab+bc+ca)} \tag{3.49}$$

を得る。この形は a,b,c に関して対称である。このことは δ が CF 上にあることを意味している。

(2) の証明に移ろう。



p が b と c を結ぶ直線と e と f を結ぶ直線上にあるので、定理 1.4.1 及び補題 3.2.2 より次を得る。

$$\begin{cases} p + bc\overline{p} = b+c \\ p + a^2\overline{p} = ta \end{cases} \tag{3.50}$$

$u = t+1, \varepsilon = a+b+c$ とおいてこれを解くと

$$\overline{p} = \frac{ua-\varepsilon}{a^2-bc}$$

を得る。同様にして、q, r を求めて、まとめると

$$\overline{p} = \frac{ua-\varepsilon}{a^2-bc},\ \overline{q} = \frac{ub-\varepsilon}{b^2-ca},\ \overline{r} = \frac{uc-\varepsilon}{c^2-ab}, \tag{3.51}$$

従って

$$\frac{\overline{r}-\overline{p}}{\overline{q}-\overline{p}} = \frac{\dfrac{uc-\varepsilon}{c^2-ab} - \dfrac{ua-\varepsilon}{a^2-bc}}{\dfrac{ub-\varepsilon}{b^2-ca} - \dfrac{ua-\varepsilon}{a^2-bc}} \tag{3.52}$$

となる。$\eta = ab + bc + ca$ とおくと

$$\begin{cases} (a^2 - bc)(uc - \varepsilon) - (c^2 - ab)(ua - \varepsilon) \\ \quad = (a^2c - bc^2 - ac^2 + a^2b)u + (-a^2 + bc + c^2 - ab)\varepsilon = (a - c)(u\eta - \varepsilon^2) \\ (a^2 - bc)(ub - \varepsilon) - (b^2 - ca)(ua - \varepsilon) \\ \quad = (a^2b - b^2c - ab^2 + a^2c)u + (-a^2 + bc + b^2 - ca)\varepsilon = (a - b)(u\eta - \varepsilon^2) \end{cases} \tag{3.53}$$

なので、式 (3.52) より、次を得る。

$$\frac{\overline{r} - \overline{p}}{\overline{q} - \overline{p}} = \frac{(b^2 - ca)(a - c)}{(c^2 - ab)(a - b)} \tag{3.54}$$

a, b, c の長さが 1 つまり $\overline{a} = \frac{1}{a}, \overline{b} = \frac{1}{b}, \overline{c} = \frac{1}{c}$ であることを利用すると式 (3.54) の右辺が実数であることが分かる。よってその式の左辺は実数である。これは、 p, q, r が一直線上にあることを意味している。よって定理の (2) が示せた。

式 (3.51) と式 (3.53) より
$\overline{r} - \overline{p} = \frac{(a - c)(u\eta - \varepsilon^2)}{(c^2 - ab)(a^2 - bc)}$
$\varepsilon = a + b + c, \eta = ab + bc + ca$ で a, b, c が長さが 1 であることに注意すると
$\overline{\varepsilon} = \frac{\eta}{abc}, \overline{\eta} = \frac{\varepsilon}{abc}$
である。従って

$$r - p = \frac{(\frac{1}{a} - \frac{1}{c})(\frac{u\varepsilon}{abc} - (\frac{\eta}{abc})^2)}{(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab})(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{bc})} = \frac{(c - a)(uabc\varepsilon - \eta^2)}{(ab - c^2)(bc - a^2)} \tag{3.55}$$

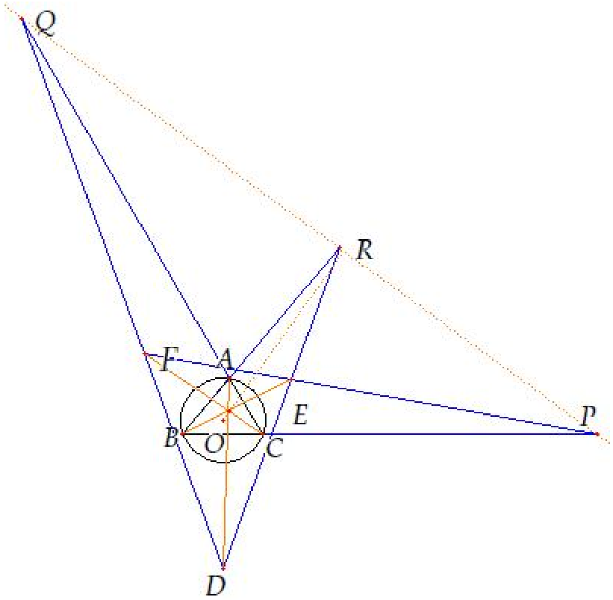
式 (3.49) で求めたように $\delta = \frac{t(uabc\varepsilon - \eta^2)}{u^2abc - \varepsilon\eta}$ だったので

$$\frac{\delta}{r - p} = \frac{t(ab - c^2)(bc - a^2)}{(c - a)(u^2abc - \varepsilon\eta)} \tag{3.56}$$

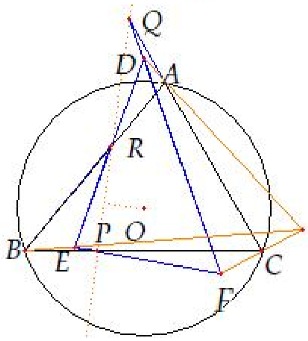
従って

$$\frac{\overline{\delta}}{\overline{r} - \overline{p}} = \frac{t(\frac{1}{ab} - \frac{1}{c^2})(\frac{1}{bc} - \frac{1}{a^2})}{(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})(u^2\frac{1}{abc} - \frac{\eta\varepsilon}{(abc)^2})} = \frac{t(c^2 - ab)(a^2 - bc)}{(a - c)(u^2abc - \eta\varepsilon)} = \frac{-\delta}{r - p} \tag{3.57}$$

よって $\frac{\delta}{r - p}$ が純虚数であることが分かった。このことは 0 から p と r を結ぶ直線に引いた垂線の上に δ があることを意味している。よって、定理の (3) が証明された。



左の図は
$s = 1.2$
のときの図です



s が 負の数でも成り立ちます左の図は
$s = -0.4$
のときの図です